

LISTA 5

Nos exercícios 1. a 12., use a definição para verificar se a integral imprópria converge ou diverge. Calcule o valor das integrais impróprias que convergem.

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$ | 5. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x - 8)^{\frac{2}{3}}}$ | 9. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ |
| 2. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ | 6. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$ | 10. $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$ |
| 3. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ | 7. $\int_0^{\infty} e^{-t} \sin t dt$ | 11. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4} dx$ |
| 4. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$ | 8. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{- x } dx$ | 12. $\int_0^{\infty} e^{-st} \sinh t dt, \quad s > 1$ |

13. Calcule, se possível, a área da região R limitada pela curva $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ e sua assíntota, situada à direita do eixo y .
14. Calcule, se possível, a área da região R situada no primeiro quadrante e abaixo da curva de equação $y = e^{-x}$.

Nos exercícios 15. a 23. discuta a convergência da integral $\int_1^{\infty} f(x)$ para a função f dada.

- | | | |
|--|---|---|
| 15. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ | 18. $f(x) = \frac{ \sin x }{x^2}$ | 21. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + x^2}$ |
| 16. $f(x) = e^{-x} \ln x$ | 19. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 + 1}$ | 22. $f(x) = e^x \ln x$ |
| 17. $f(x) = \frac{1}{x + e^x}$
(compare com $\frac{1}{e^x}$) | 20. $f(x) = \frac{2 + \sin x}{x}$
(compare com $\frac{1}{x}$) | 23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$
(compare com $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}$) |

24. Discuta a convergência de $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x}$ (Sugestão: Para $s > 1$, compare com $\frac{1}{x^s}$; para $s = 1$, calcule a integral; para $s < 1$, compare com $\frac{1}{x \ln x}$)

Nos exercícios 25. a 30. discuta a convergência das integrais impróprias.

- | | |
|--|---|
| 25. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} dx$
(compare com $\frac{x^2}{\sqrt{x^8}}$) | 28. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
(faça $u = \sqrt{x}$ e calcule a integral) |
| 26. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s}$
(calcule a integral) | 29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x \sin x}$
(compare com $\frac{1}{x}$) |
| 27. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + x \ln x}$
(compare com $\frac{1}{x + x \ln x}$) | 30. $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$
(calcule a integral) |

RESPOSTAS DA LISTA 5

1. 2 3. $\ln 2$ 5. diverge (∞) 7. $\frac{1}{2}$ 9. 1 11. diverge (∞)
2. diverge (∞) 4. 0 6. $\frac{\ln 3}{2}$ 8. 2 10. $\frac{2\sqrt{26}}{3}$ 12. $\frac{1}{s^2 - 1}$
13. $2 \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}} dx = \frac{64}{3}$ 14. $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
15. divergente, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \neq 0$
16. convergente, pois $x \geq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-x} \ln x \leq e^{-x} x \Rightarrow 0 \leq \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx \leq \int_1^\infty e^{-x} x dx = \frac{2}{e}$
17. convergente, pois $x \geq 1 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{e^x + x} < \frac{1}{e^x} \Rightarrow 0 < \int_1^\infty \frac{1}{e^x + x} dx < \int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e}$
18. convergente, pois $\forall x \neq 0, 0 \leq \frac{|\text{sen } x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow 0 \leq \int_1^\infty \frac{|\text{sen } x|}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$
19. divergente, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 + 1} = 1 \neq 0$
20. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{2 + \text{sen } x}{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{2 + \text{sen } x}{x} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$
21. convergente, pois $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{\text{sen}^2 x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow 0 \leq \int_1^\infty \frac{\text{sen}^2 x}{1 + x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$
22. divergente, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln x = \infty \neq 0$
23. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} > 0 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} dx = \infty$
24. $s > 1$: convergente, pois $x \geq e \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^s \ln x} \leq \frac{1}{x^s} \Rightarrow 0 < \int_e^\infty \frac{1}{x^s \ln x} dx \leq \int_e^\infty \frac{1}{x^s} dx = \frac{e^{1-s}}{s-1}$
 $s = 1$: divergente, pois $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \infty$
 $s < 1$: divergente, pois $x \geq e > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^s \ln x} \geq \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow \int_e^\infty \frac{1}{x^s \ln x} dx \geq \int_e^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \infty$
25. converge, pois $\forall x \neq 0 \Rightarrow 0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} < \frac{x^2}{\sqrt{x^8}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow 0 < \int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$
26. $s \leq 1$: divergente, pois $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s} dx = \infty$
 $s > 1$: convergente, pois $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s} dx = \frac{1}{s-1}$
27. diverge: $x \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + x \ln x} \geq \frac{1}{x + x \ln x} > 0 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{x}{1 + x \ln x} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x + x \ln x} dx = \infty$
28. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^{-u^2} du$. Não é possível aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular $\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^{-u^2} du$ pois não é possível encontrar a primitiva da função e^{-u^2} , mas há um teorema que garante que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado é integrável, isto é, o limite da Soma de Riemann existe e é finito. Aplicando esse teorema, a função e^{-u^2} é contínua no intervalo $[\sqrt{\epsilon}, 1]$, logo $\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^{-u^2} du$ é um número finito. Assim, apesar de não podermos calcular a integral original, podemos concluir que é convergente.
29. divergente, pois $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{x \text{sen } x} > \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \text{sen } x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx = \infty$
30. divergente, pois $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{5}{4(x-2)} - \frac{5}{4(x+2)} \right) dx = \infty$