

LISTA 8

Nos exercícios 1. a 8. determine as derivadas parciais da função dada.

1. $f(x, y) = (x^3 + y^3)(x - y)$

5. $f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2} dt$

2. $f(x, y) = \text{sen}(x + y) + \text{cos}(x - y)$

6. $f(x, y, z) = \frac{e^x}{e^y - e^z}$

3. $f(x, y) = \arcsen\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$

7. $w = f(x, y, z) = (y^2 + z^2)^x$.

4. $f(x, y) = \int_x^y \text{cos } t dt$

8. $w = f(r, s, v) = (2r + 3s)^{\text{cos}(v)}$.

9. Mostre que se $w = x^2y + y^2z + z^2x$ então $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$.

10. Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(3, \pi/4)$, onde $f(x, y) = \ln(x \tan y)$.

11. Seja $f(x, y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 3)$ e interprete geometricamente.

12. Dada a função $z = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2)$.

13. Na figura (1) encontram-se os gráficos de três funções de duas variáveis:

$$f, \quad \partial f/\partial x \quad \text{e} \quad \partial f/\partial y.$$

Em (c) está o gráfico de f . Identifique os outros dois gráficos.

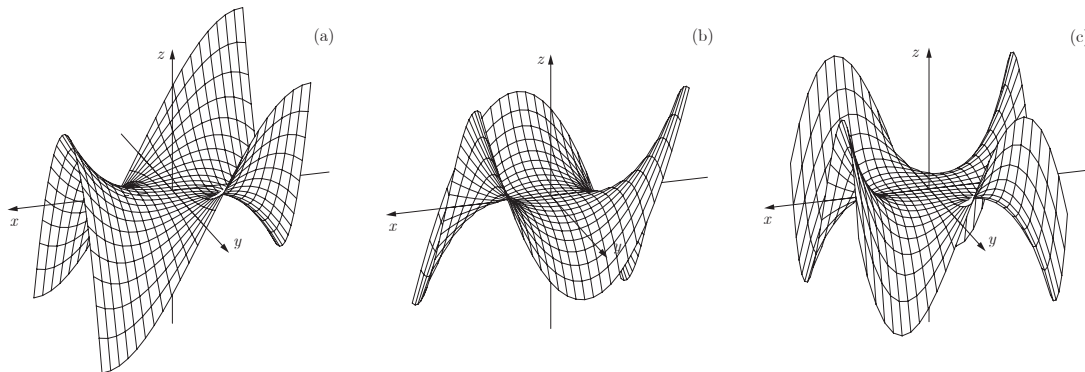


Figura 1: Os gráficos de f , $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

14. A função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é de classe C^1 ? Justifique.

15. A função $f(x, y, z) = \ln(1 - x - y - z)$ é de classe C^1 ? Justifique.

16. Se $f(x, y) = \arctan(x - 2y)$, determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2, 1))$.

17. Seja $f(x, y) = x \cos \frac{x}{y}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f contém a origem.

18. Determine a equação de um plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + xy$.

19. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$.
- (a) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z , quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
- (b) Calcule um valor aproximado para z correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
20. Use uma função apropriada e calcule um valor aproximado para $\sqrt{(0,01)^2 + (3,98)^2 + (2,99)^2}$.
21. A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$. Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule o valor aproximado para a variação ΔP , quando V decresce de 0,2 volts e R aumenta de 0,01 ohms.
22. Em um setor circular, o ângulo central é 80° e o raio é 20 cm. Reduzindo-se o ângulo de 1° , qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique aproximadamente inalterada?
Lembrete: área do setor circular $= \frac{\theta r^2}{2}$, θ em radianos.
23. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo em l igual a 1% e em g igual a 3%.

EXERCÍCIOS OPCIONAIS

24. A análise de certos circuitos eletrônicos envolve a fórmula

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega}},$$

em que I é a corrente, V a voltagem, R a resistência, L a indutância e ω uma constante positiva. Calcule e interprete $\partial I/\partial R$ e $\partial I/\partial L$.

25. Em um dia claro, a intensidade da luz solar às t horas após o nascente e à profundidade oceânica de x metros, pode ser aproximada por

$$I(x, t) = I_0 e^{-kx} \text{sen}^3(\pi t/D),$$

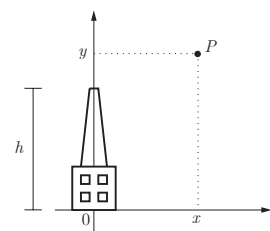
com I_0 a intensidade da luz solar ao meio-dia, D a quantidade horas do dia com luz solar e k uma constante positiva. Se $I_0 = 1000$, $D = 12$ e $k = 0.10$, calcule e interprete as derivadas parciais $\partial I/\partial t$ e $\partial I/\partial x$ quando $t = 6$ horas e $x = 5$ metros.

26. Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração $C(x, y)$ (em μ/m^3) do poluente em um ponto P situado a y metros acima do chão e cuja projeção ortogonal sobre o chão está a x quilômetros da base da chaminé pode ser representada por $C(x, y) = \frac{a}{x^2} \left(e^{-b(y-h)^2/x^2} + e^{-b(y+h)^2/x^2} \right)$

em que a e b são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente (veja a figura).

Suponha que $C(x, y) = \frac{200}{x^2} \left(e^{-0.02(y-10)^2/x^2} + e^{-0.02(y+10)^2/x^2} \right)$.

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ e $\partial C/\partial y$ no ponto $P = (2, 5)$.



RESPOSTAS DA LISTA 8 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $\begin{cases} f_x = 4x^3 + y^3 - 3x^2y \\ f_y = -x^3 + 3y^2x - 4y^3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f_x = \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) \\ f_y = \cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) \end{cases}$
3. $f_x = \frac{2x}{\sqrt{y^4 - x^4}}, f_y = \frac{-2x^2}{y\sqrt{y^4 - x^4}}$
4. $f_x = -\cos x, f_y = \cos y$
5. $f_x = -e^{-x^2}, f_y = e^{-y^2}$
6. $f_x = \frac{e^x}{e^y - e^z}, f_y = \frac{-e^{x+y}}{(e^y - e^z)^2}, f_z = \frac{e^{x+z}}{(e^y - e^z)^2}$
7. $w_x = (y^2 + z^2)^x \ln(y^2 + z^2)$
 $w_y = 2xy(y^2 + z^2)^{x-1}, w_z = 2xz(y^2 + z^2)^{x-1}$
8. $w_r = 2 \cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
 $w_s = 3 \cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
 $w_v = -\operatorname{sen}(v) \ln(2r + 3s)(2r + 3s)^{\cos(v)}$

9. Calculando as derivadas parciais, somando e simplificando, chega-se ao termo do lado direito da equação.

10. $f_x(x, y) = \frac{1}{x}; f_x(3, \pi/4) = 1/3; f_y(x, y) = \frac{\tan y}{x \sec^2 y}; f_y(3, \pi/4) = 2$

11. $f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; f_x(1, 3) = -\frac{1}{2}; f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; f_y(1, 3) = -\frac{3}{2}$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3)$, r no plano $y = 3$. Como $f_x(1, 3) < 0$, o ângulo entre r e o semi-eixo positivo Ox é maior que 90° .

Seja s a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3)$, s no plano $x = 1$. Como $f_y(1, 3) < 0$, o ângulo entre r e o semi-eixo positivo Oy é maior que 90° .

12. $z_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} - e^x; z_x(1, 2) = -e + 2e^5; z_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}; z_y(1, 2) = 4e^5.$

13. (a) $\partial f / \partial y$ (b) $\partial f / \partial x$

14. Não, pois $\nabla f_x(0, 0, 0)$ (ou $\nabla f_y(0, 0, 0)$ ou $\nabla f_z(0, 0, 0)$) $\stackrel{\text{teorema}}{\Rightarrow} f$ não é de classe C^1 em $(0, 0, 0)$.

15. Sim, pois f é composta de funções de classe C^1 .

16. Plano tangente: $z = (x - 2) - 2(y - 1)$. Reta normal: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, -2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.

17. A equação do plano tangente em $\forall (x_0, y_0, f(x_0, y_0)), y_0 \neq 0$ é

$$z = \left(-\frac{x_0}{y_0} \operatorname{sen} \frac{x_0}{y_0} + \cos \frac{x_0}{y_0}\right) x + \left(\frac{x_0^2}{y_0^2} \operatorname{sen} \frac{x_0}{y_0}\right) y, \text{ que é satisfeita por } (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

18. $z = -3 + 2(x - 3) + 3(y + 4)$.

19. (a) 0,026 (b) 1,026

20. Sendo $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então

$$\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2} = f(0 + 0.01, 4 - 0.02, 3 - 0.01) \simeq 4,978.$$

21. -5

22. 0,125 cm

23. 2%

24. $\frac{\partial I}{\partial R} = \frac{-RV}{\sqrt{(R^2 + L^2w)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente I em relação a variação da resistência R .

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{-2wLV}{\sqrt{(R^2 + L^2w)^3}}, \text{ representa a taxa da variação da corrente } I \text{ em relação a variação da indutância } L.$$

25. $\frac{\partial I}{\partial x}(5, 6) = -100e^{-0.5}$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação da profundidade no nível de profundidade 5 metros, após 6 horas do amanhecer.

$\frac{\partial I}{\partial t}(5, 6) = 0$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação do tempo após 6 horas do amanhecer, no nível de profundidade 5 metros.

26. $\frac{\partial C}{\partial x}(2, 5) = -12.5 (3.5 e^{-0.125} - 0.5 e^{-1.125}) \simeq -36.5801$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da distância x , quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.
- $\frac{\partial C}{\partial y}(2, 5) = -2.5 (e^{-0.125} - 3 e^{-1.125}) \simeq -0.2287$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da altura y , quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.