LISTA 9

1. Calcule todas as derivadas parciais de terceira ordem da função de produção $Q = 4K^{3/4}L^{1/4}$. Use o teorema de Schwarz para acelerar o processo.

2. Uma função $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ é *harmônica* se ela satisfaz a *equação de Laplace* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0$. Mostre que a função $z = f(x, y) = x^3 - 3\,xy^2$ é harmônica.

   Quais das funções dos exercícios 3. a 8. satisfazem a equação de Laplace?

3. $z = f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
4. $z = f(x, y) = x^2 - y^2$.
5. $z = f(x, y) = y^3 + 3\,x^2y$.
6. $z = f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} z$.
7. $z = f(x, y) = \arctan(x/y)$
8. $z = f(x, y) = \ln(x/y)$.
9. Verifique que $v = \operatorname{sen}(k\,x) \cdot \operatorname{sen}(ak\,t)$ satisfaz a *equação da onda* $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.
10. No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t e à profundidade x pode ser dada aproximadamente por $T = T_0\, e^{-\lambda \cdot x} \operatorname{sen}(\omega\, t - \lambda\, x)$, em que T_0, ω e λ são constantes. Mostre que T satisfaz a *equação unidimensional do calor*: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, com $k = 2\,\lambda^2/w$.

EXERCÍCIO OPCIONAL

11. O objetivo deste exercício é examinar uma função de classe C^1 para a qual a tese do teorema de Schwarz falha: as derivadas parciais mistas não são iguais. Seja

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   (a) Prove que f se anula sobre os eixos x e y. Conclua então que $(\partial f/\partial x)(0, 0)$ e $(\partial f/\partial y)(0, 0)$ são iguais a zero.

   (b) Calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ para pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ e conclua que $(\partial f/\partial x)(0, y) = -y$ e $(\partial f/\partial y)(x, 0) = x$.

   (c) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1.$

   (d) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = +1$ e conclua que as derivadas parciais mistas de f não são iguais em $(0, 0)$.

   (e) Calcule $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

   (f) Use o item anterior para mostrar que $(\partial f^2/\partial x \partial y)(x, x) = 0$ para $x > 0$.

   (g) Conclua que $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(x, y)$ é descontínua na origem $(0, 0)$ e assim f não é uma função de classe C^2. Logo a hipótese do teorema de Schwarz (a saber, f é uma função de classe C^2) não se verifica.

RESPOSTAS DA LISTA 09

1. $Q_K = 3K^{-1/4}L^{1/4}$; $Q_L = K^{3/4}L^{-3/4}$; $Q_{KK} = -(3/4)K^{-5/4}L^{1/4}$; $Q_{LL} = -(3/4)K^{3/4}L^{-7/4}$; $Q_{KKK} = (15/16)K^{-9/4}L^{1/4}$; $Q_{LLL} = (21/16)K^{3/4}L^{-11/4}$; $Q_{KL} = Q_{LK} = (3/4)3K^{-1/4}L^{-3/4}$; $Q_{KLK} = Q_{LKK} = Q_{KKL} = -(3/16)3K^{-5/4}L^{-3/4}$; $Q_{KLL} = Q_{LKL} = Q_{LLK} = -(9/16)3K^{-1/4}L^{-7/4}$

3. Sim 4. Sim 5. Não 6. Sim 7. Sim 8. Não