LISTA 11

1. Se $f(x,y)=e^{xy}$, $g(t)=\cos t$, $h(t)=\operatorname{sen} t$ e $F(t)=f(g(t),h(t))$, calcule $F'(0)$.

2. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w=xy+yz+xz$, $x=r$, $y=r\cos t$, e $z=r\operatorname{sen} t$.

3. Seja $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)-g\left(\frac{y}{x}\right)$, onde f e g são de classe C^1. Mostre que $z_x+\dfrac{y}{x}\,z_y=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

4. Um ponto se desloca sobre a curva $x=2\operatorname{sen} t$, $y=7\cos t-3$, $z=f(2\operatorname{sen} t, 7\cos t-3)$, onde $f(x,y)=\sqrt{49-x^2-y^2}$. Qual a componente vertical (em z) da velocidade no instante que suas coordenadas são $(2,\ -3,\ 6)$?

5. O que está errado com o seguinte argumento?

   Suponha que $w=f(x,y)$ com $y=x^2$. Pela regra da cadeia,

   $$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} \implies \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+2\cdot x\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

   Assim, $0=2\cdot x\cdot(\partial w/\partial y)$, de modo que $\partial w/\partial y=0$.

6. Seja $w=x^2+y^2-z^2$, $x=\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ e $z=\rho\cos\varphi$. Calcule w_ρ, w_φ e w_θ.

7. Se $w=f(x,y)$, f derivável, $x=r\cos\theta$ e $y=r\operatorname{sen}\theta$, mostre que $w_x^2+w_y^2=w_r^2+\dfrac{w_\theta^2}{r^2}$.

8. Se $u=x^m f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{z},\frac{z}{x}\right)$, mostre que $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=mu$.

9. Sejam g e h funções de classe C^1 e $f(x,y)=(g(x,y))^{h(x,y)}$. Assuma que $g(1,2)=2$, $h(1,2)=-2$, $g_x(1,2)=-1$, $g_y(1,2)=3$, $h_x(1,2)=5$ e $h_y(1,2)=0$. Encontre $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$.

10. Seja $w=\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,dt$, $x=rs^4$ e $y=r^4s$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

11. Considere as funções f,g e h tais que $f(x,y)=\big(xy,x^2+y,x-y\big)$, $g(u,v,w)=2w\ln(uv)$ e $h(s)\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$. Seja $H(x,y)=(h\circ g\circ f)(x,y)$.

    (a) Para ser possível calcular $\dfrac{\partial H}{\partial x}(1,3)$, para que valor de s é preciso conhecer $h'(s)$?

    (b) Supondo que para o valor de s do item anterior, $h'(s)=5$, calcule $\dfrac{\partial H}{\partial x}(1,3)$.

12. Mostre que a função $u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)$, onde c é constante e $F,\ G$ são de classe C^2, é solução da equação da onda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

13. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x,y)$. Sabe-se que $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y\partial x}(x,y)=0$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y)=2$. Calcule $\dfrac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)$, sendo $U(\rho,\theta)=T(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)$.

14. Seja $g(u,v)=f(u+v,uv)$, f de classe C^1, $x=u+v$, $y=uv$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,1)$ e $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(1,1)$, sabendo que $f_x(2,1)=3$, $f_y(2,1)=-3$, $f_{xx}(2,1)=0$, $f_{xy}(2,1)=f_{yx}(2,1)=1$, $f_{yy}(2,1)=2$.

15. Se a,b,c e k são constantes, mostre que $w=(a\cos cx+b\operatorname{sen} cx)e^{-kc^2t}$ satisfaz a equação do calor $\dfrac{\partial w}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

16. Sejam $z=z(x,y)$, $x=e^u\cos v$ e $y=e^u\operatorname{sen} v$. Suponha que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

17. Suponha que $f \in \mathcal{C}^2$, $c \neq 0$, c constante e $f(x,t)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
Determine constantes m, n, p e q para que $g(u,v) = f(x,t)$, onde $x = mu + nv$, $mn \neq 0$ e $t = pu + qv$, $pq \neq 0$, satisfaça a equação $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

RESPOSTAS DA LISTA 11 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $F'(0) = 1$
2. $w_r = r(2\,\text{sen}\, t + 2\cos t + \text{sen}\,(2t)$, $w_t = r^2(\cos t - \text{sen}\, t + \cos 2t)$
3. Aplicando a regra da cadeia e simplificando, $z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$ e $z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$. Substituindo z_x e z_y na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
4. $\dfrac{dz}{dt}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$
5. Não é possível "cortar" os termos $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ que aparecem dos dois lados da equação pois, apesar de aparentemente serem iguais, têm significados diferentes. O termo do lado esquerdo é a derivada parcial da função composta e o do lado direito é a derivada parcial da função externa na composta.
6. $w_\rho = -2\rho\cos(2\varphi)$; $w_\varphi = 2\rho^2\,\text{sen}\,(2\varphi)$; $w_\theta = 0$.
7. Aplicando a regra da cadeia, $w_r = w_x \cdot \cos\theta + w_y \cdot \text{sen}\,\theta$ e $w_\theta = w_x \cdot (-r\,\text{sen}\,\theta) + w_y \cdot (r\cos\theta)$. Substituindo w_r e w_θ na expressão do lado direito da equação e usando simplificação trigonométrica, verifica-se que é igual à expressão do lado esquerdo da equação.
8. Seja $r = \dfrac{y}{x}$; $s = \dfrac{x}{z}$; $t = \dfrac{z}{x}$ e $v = f(r,s,t)$. Aplicando a regra da cadeia para calcular as derivadas parciais, multiplicando-as pelos termos indicados na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, obtém-se $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = m\, x^m\, v + x^m\left(-\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial s} - \dfrac{z}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$; $y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^m \cdot \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial r}$; $z\dfrac{\partial u}{\partial z} = x^m\left(-\dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{z}{x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$. Somando e simplicando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
9. $f_x(1,2) = \dfrac{1 + 5\ln 2}{4}$; $f_y = (1,2) = -\dfrac{3}{4}$.
10. $w_r = -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s\, e^{r^8 s^2}$; $w_s = -4rs^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^8 s^2}$.
11. (a)$s = -4\ln 12$ (b)$\dfrac{\partial H}{\partial x}(1,3) = -30 + 10\ln 12$.
12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F''(x+ct)\left(c^2\right) + G''(x-ct)\left(c^2\right)$; $c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2(F''(x+ct) + G''(x-ct))$. São iguais.
13. $-2\rho\,\text{sen}\,\theta - (\rho\cos\theta) \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) + \left(\rho^2\,\text{sen}^2\theta\right) \cdot \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$
14. $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,1) = 0$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) = 1$
15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (a\cos cx + b\,\text{sen}\, cx)\left(-kc^2\right) e^{-kc^2 t}$; $k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k(-ac^2\cos cx - bc^2\,\text{sen}\, cx)e^{-kc^2 t}$, comparando, são iguais.

16. $= 0$

17. Existem várias respostas, pois $mn + c^2pq = 0$ e $np + mq = 0$ são condições suficientes. Por exemplo, $m = n = 1,\ q = \dfrac{1}{c^2}, p = -\dfrac{1}{c^2}$.