

LISTA 12

1. A figura 1 mostra uma porção de um mapa da região sul de Minas Gerais onde estão indicadas as curvas de nível da função altura h com relação ao nível do mar. Existe uma linha grossa para cada 100 m de elevação e uma linha fina em cada intervalo de 20 m. Considere os pontos A , B , C , D e E no mapa. As setas indicam o vetor gradiente de h no ponto indicado. Diga se as relações abaixo são verdadeiras ou não, marcando um “V” se a relação for verdadeira e um “F” se ela for falsa.

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $h(C) = h(E)$, | <input type="checkbox"/> $h(A) > h(C)$, |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(A) > 0$, | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial y}(A) > 0$, |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(B) < 0$, | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial y}(B) < 0$, |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(D) > 0$, | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial y}(E) < 0$, |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(A) > \frac{\partial h}{\partial x}(E)$, | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial h}{\partial x}(B) > \frac{\partial h}{\partial x}(D)$. |

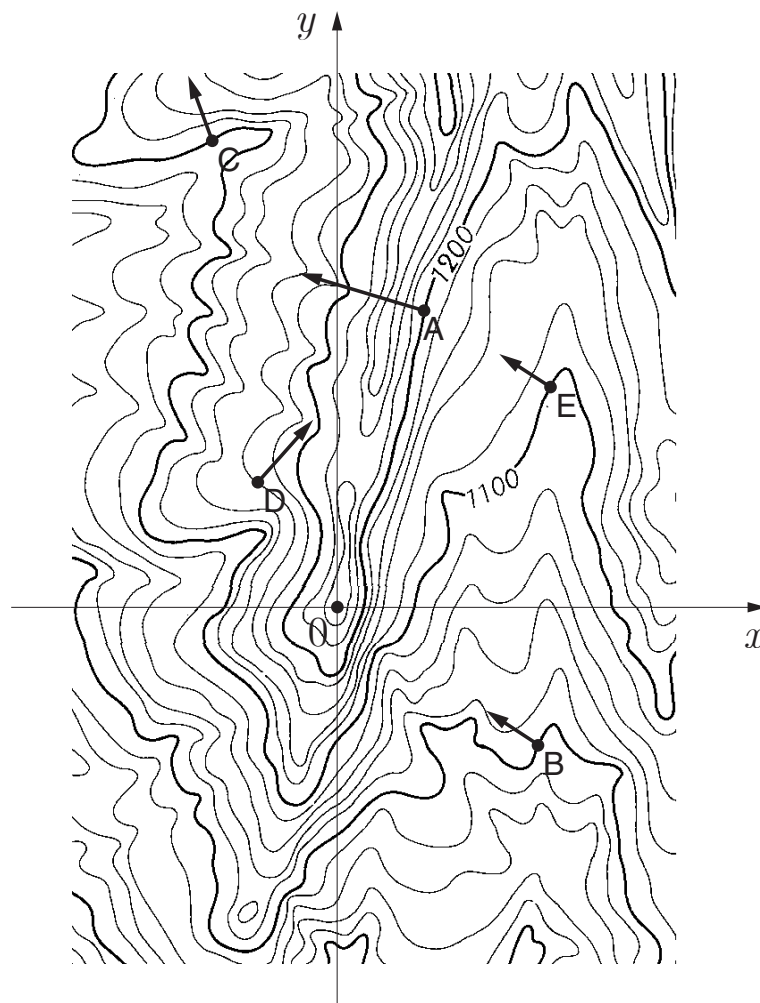


Figura 1: Mapa de contorno de uma região no sul de Minas Gerais.

- Seja $f(x, y, z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ e $P = (\ln 3, 3\pi/2, 2)$. Obtenha:
 - $\nabla f(P)$
 - A equação de S , a superfície de nível de f que contém P
 - A equação da reta normal à S em P .
 - A equação do plano tangente à S em P .
- Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$, contendo o ponto $P = (2, -3, 4)$.
- Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) = 1$, contendo o ponto $P = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- Descreva parametricamente a reta tangente à curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ e $x^2 + y^2 = 13$, no ponto $(3, 2, -6)$ (Sugestão: observe que essa é a reta de interseção dos planos tangentes aos gráficos das superfícies, em P).
- Seja S_1 o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e S_2 a superfície de nível 0 de $F(x, y, z) = x^2 - y + z^2$. Seja $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ e $P = (1, 2, 1) \in \mathcal{C}$. Determine a equação da reta tangente à \mathcal{C} em P , sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 5$.
- As curvas definidas a seguir se interceptam no ponto $(2\pi, \pi)$, formando um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ rad.

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy - \cos(x - 2y) = 2\pi^2 - 1\} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$$

(a) Encontre um valor possível para $f'(2\pi)$. Quantas soluções tem esse problema?

(b) Resolva o mesmo problema supondo que o ângulo é $\frac{\pi}{6}$ rad.

Sugestão: Nos dois casos encontre um vetor \vec{u} perpendicular a curva γ_1 em $(2\pi, \pi)$, um vetor \vec{v} tangente a curva γ_2 em $(2\pi, \pi)$ e use a fórmula do ângulo θ entre esses vetores, $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

RESPOSTAS DA LISTA 12

- (a) $\nabla f(P) = (3, 0, 1)$ (b) $z - e^x \operatorname{sen} y = 5$ (c) $(x, y, z) = \left(\ln 3 + 3\lambda, \frac{3\pi}{2}, 2 + \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 (d) $3x + z = 2 + 3 \ln 3$.
- Reta normal: $(x, y, z) = (2 + 13\lambda, -3 + 15\lambda, 4 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, plano tangente: $13x + 15y + z = -15$.
- Reta normal: $(x, y, z) = \left(1, \frac{\pi}{2}, \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, plano tangente: $z = 0$.
- $(x, y, z) = (3 + 2\lambda, 2 - 3\lambda, -6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(x, y, z) = (1 - 9\lambda, 2 + 8\lambda, 1 + 13\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- (a) Uma solução: $f'(2\pi) = 2$
 (b) Duas soluções: $f'(2\pi) = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$ e $f'(2\pi) = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}$.