LISTA 13

1. Sendo $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ no ponto $(1,2,1)$ na direção e sentido do vetor $\vec{v} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

2. A temperatura do ar em pontos do espaço é dada pela função $T(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$. Um mosquito localizado em $(1,2,1)$ deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção e sentido ele deve voar?

3. Em que direção e sentido se deve seguir, começando da origem, para obter a taxa mais rápida de decrescimento da função $f(x,y,z) = (2-x-y)^2 + (3x+2y-z+1)^2$?

4. Suponha que a temperatura T num ponto $P(x,y,z)$ é dada por $T(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 4z^2$. Determine a taxa de variação de T no ponto $(1,-2,1)$ na direção e sentido do vetor $4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente nesse ponto? Qual a taxa máxima de crescimento?

   Nos exercícios 5. e 6. considere $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário e calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. Uma função de classe C^1 f tem, no ponto $(1,1)$, derivada direcional igual a 3 na direção do vetor $3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ e igual a -1 na direção do vetor $4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. Calcule:

   (a) $\nabla f(1,1)$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ tem a direção e sentido do vetor $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

8. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy e um indivíduo que se encontra na posição $(3,2)$ pretende dar um passeio.

   (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deveria percorer para desfrutar sempre da mesma temperatura.
   (b) Qual a direção e sentido que deveria tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
   (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura T em °C, de quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item (b)?
   (d) De quanto decrescerá aproximadamente a temperatura, caso caminhe $0,01$ km na direção $\vec{\jmath}$?

9. A temperatura de uma chapa é dada por $T(x,y) = x^2 + y^2$ (x, y em cm e T em °C). Calcule de quanto ela varia aproximadamente, se caminharmos 1 cm a partir do ponto $(3,4)$ na direção e sentido do vetor que faz um ângulo θ com o semi-eixo x positivo, se: (a) $\theta = 30°$; (b) $\theta = 210°$?

10. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 + y^2$, na direção e sentido da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em $(3,4)$, no mesmo ponto.

11. A temperatura de uma chapa plana é dada por $T(x,y) = x^2 + y^2$. A partir do ponto $P(3,4)$, determine:
    (a) O gradiente da temperatura;
    (b) A direção e sentido em que a temperatura cresce o mais rápido possível e qual a taxa de crescimento?
    (c) A direção e sentido em que a temperatura decresce o mais rápido possível e qual a taxa de decrescimento?
    (d) $D_{\vec{u}}T(3,4) = \dfrac{\partial T}{\partial \vec{u}}(3,4)$, onde $\vec{u}$ faz um ângulo de 30° com o gradiente de T em $(3,4)$

12. Num balão a temperatura T em qualquer ponto P diferente do centro C é positiva e proporcional ao quadrado de sua distância ao centro C. Calcule a taxa de variação da temperatura em P seguindo um vetor unitário $\vec{u}$. Caracterize as taxas máxima, mínima e nula no ponto P.

13. A temperatura T numa câmara cresce com a altura. As isotermas são lâminas horizontais e o módulo do vetor gradiente em cada ponto (x, y, z) é diretamente proporcional à altura z do ponto. Determine a expressão de T em (x, y, z), sabendo-se que é nula quando a altura é zero.

14. Verificou-se que a densidade do ar em certa região industrial é mais sensível na direção vertical e que a taxa de variação é inversamente proporcional ao quadrado da altura. Estude a densidade do ar sabendo que tende a zero quando a altura tende a infinito.

RESPOSTAS DA LISTA 13

1. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2,1) = 4$

2. $-\nabla f(1,2,1) = (-2,4,-2)$

3. $-\nabla f(0,0,0) = (-2,0,2)$

4. $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$; $(4,4,8)$; $4\sqrt{6}$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = a^3$

6. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \begin{cases} 0\,, & \vec{u} = (\pm 1, 0) \text{ ou } \vec{u} = (0, \pm 1) \\ \nexists\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$

7. (a)$\nabla f(1,1) = (1,3)$ (b)$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2\sqrt{2}$

8. (a) $x^2 + 2y^2 = 17$ (b) $\nabla T(3,2) = (-6,-8)$
   (c) $\triangle T \simeq dT = 0,1°C$, pois $\triangle x = -\dfrac{3}{5} \times 0,01$ e $\triangle y = -\dfrac{4}{5} \times 0,01$
   (d) $\triangle T \simeq dT = 0,08°C$, pois $\triangle x = 0$ e $\triangle y = 0,01$

9. (a) $\triangle T \simeq 4 + 3\sqrt{3}\,°C$ (b) $\triangle T \simeq -4 - 3\sqrt{3}\,°C$

10. zero

11. (a) $(6,8)$ (b) $(6,8)$; taxa máxima $= 10$
    (c) $(-6,-8)$; taxa mínima $= -10$ (d) $5\sqrt{3}$

12. $dT_{\vec{u}}(P) = 2k\overrightarrow{CP} \cdot \vec{u}$, $k > 0$; taxa máxima $= 2k\left\|\overrightarrow{CP}\right\|$; taxa mínima $= -2k\left\|\overrightarrow{CP}\right\|$;
    taxa nula na direção e nos dois sentidos perpendiculares a $\overrightarrow{CP}$.

13. $T(x,y,z) = \dfrac{1}{2}kz^2$, k constante de proporcionalidade positiva.

14. $T(x,y,z) = \dfrac{k}{z}$, k constante de proporcionalidade positiva.