

LISTA 14

- Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto $P_0 = (1, 1)$ e calcule $y'(1)$ e $y''(1)$ para $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$.
- Considere a equação $y(x - 2)^3 + xe^{y-1} = 0$. É possível, pelo Teorema da Função Implícita, garantir que esta equação define implicitamente uma única função $y = f(x)$, com x numa vizinhança de x_0 e y numa vizinhança de y_0 , quando (x_0, y_0) é
 - $(1, 1)$?
 - $(0, 0)$?
 - $(2, 1)$?
- Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = F(x, y) = (y - x)^4$.

- Faça um esboço das curvas de nível de F associadas aos níveis $z = 0$, $z = 1$ e $z = 16$.
- Faça um esboço do gráfico de F .
- Mostre que $P = (0, 0)$ pertence à curva de nível

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$$

de F associada ao nível $z = 0$.

- Mostre que $F_x(0, 0) = 0$ e $F_y(0, 0) = 0$.
 - Mostre que a curva de nível \mathcal{F}_0 pode ser representada como o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.
 - Este exercício constitui um contra-exemplo para o teorema da função implícita para \mathbb{R}^2 ? Justifique cuidadosamente sua resposta.
- A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente uma função de classe C^1 $y = f(x)$ cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, \sqrt[3]{4})$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y .
 - Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ define implicitamente uma função de classe C^1 $z = f(x, y)$ cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x , y e z .

Nos exercícios 6. e 7. obtenha f_x e f_y para $z = f(x, y)$ definida pela equação dada.

6. $\ln(xyz) + e^z = 1$

7. $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

- Seja uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f(0.5, 0.5) > 0$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(0.5, 0.5, f(0.5, 0.5))$.

- Considere a função $w = f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, onde a , b e c são constantes positivas.

Como vimos, o elipsóide é a superfície de nível de f associada ao nível $w = 1$:

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

- Mostre que em todos os pontos $P = (x^*, y^*, z^*)$ do elipsóide \mathcal{F}_1 tem-se que $\nabla f(P) \neq \vec{0}$.
- Se $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$, encontre a equação do plano tangente ao elipsóide no ponto $P = (2\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/3, 4\sqrt{3}/3)$ do elipsóide \mathcal{F}_1 .
- Encontre a equação do plano tangente ao elipsóide em um ponto $P = (x^*, y^*, z^*)$ do elipsóide \mathcal{F}_1 .

10. Sabendo que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \operatorname{sen} z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 cujo gráfico está numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, para (x, y) na vizinhança de $(1, 1)$ e encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 0)$.
11. Seja $y = y(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde F é de classe C^1 . Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F .
12. A função de classe C^1 $z = z(x, y)$ é dada pela equação $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ é um real fixo), onde $f(u, v)$ é de classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.
13. Sabendo que a equação $e^{x+y+z} + xyz = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, determine a taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$.

RESPOSTAS DA LISTA 14 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Hipóteses satisfeitas: $F(x, y) = \ln(xy) - 2xy + 2$ é uma função de classe C^1 no conjunto aberto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$ que contém $(1, 1)$, pois $F_x(x, y) = \frac{1}{x} - 2y$ e $F_y(x, y) = \frac{1}{y} - 2x$ são contínuas em A e ainda i) $F(1, 1) = 0$; ii) $F_y(1, 1) = -1 \neq 0$. $y'(1) = -1$ e $y''(1) = 2$.
2. $F(x, y) = y(x - 2)^3 + xe^{y-1}$ é de classe C^1 no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém qualquer (x_0, y_0) , pois $F_x(x, y) = 3y(x - 2)^2 + e^{y-1}$ e $F_y(x, y) = (x - 2)^3 + xe^{y-1}$ são contínuas em \mathbb{R}^2 , logo essa hipótese é válida nos três casos. Nas outras duas: i) $F(1, 1) = 0$; $F(0, 0) = 0$; $F(2, 1) \neq 0$ e ii) $F_y(1, 1) = 0$; $F_y(0, 0) = -8$; $F_y(2, 1) = 1 \neq 0$. A hipótese i) falha no ponto $(2, 1)$, logo é impossível encontrar uma função f tal que $f(2) = 1$. A hipótese ii) falha no ponto $(1, 1)$, neste caso nada se pode afirmar sobre a possibilidade da equação definir uma função $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$. As hipóteses i) e ii) são satisfeitas no ponto $(0, 0)$, logo o Teorema da Função Implícita é aplicável apenas neste ponto.

3. (a) (b)

(c) $F(0, 0) = 0$ (e) $y = f(x) = x$

(f) Não é um contra-exemplo. Não contradiz pois a condição $F_y(0, 0) \neq 0$ é uma condição suficiente, mas não é necessária para a existência de uma função implícita $y = f(x)$.

4. Sim, pois as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, a saber: $F(x, y) = y^3 + xy + y^3$ é de classe C^1 no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém $(0, \sqrt[3]{4})$, pois $F_x(x, y) = y + 3x^2$ e $F_y(x, y) = x + 3y^2$ são contínuas em \mathbb{R}^2 e ainda i) $F(0, \sqrt[3]{4}) = 4$ e ii) $F_y(0, \sqrt[3]{4}) = 6\sqrt[3]{2} \neq 0$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{x + 3y^2}$.
5. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ é de classe C^1 no aberto $A = \mathbb{R}^3$, que contém $(1, 1, 1)$, pois $F_x(x, y, z) = 3x^2 - 1$, $F_y(x, y, z) = 3y^2 - 1$ e $F_z(x, y, z) = 3z^2 - 1$ são contínuas em \mathbb{R}^3 . E ainda i) $F(1, 1, 1) = 0$ e ii) $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Logo as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, o que garante que a equação define implicitamente uma função $z = z(x, y)$ definida numa vizinhança de $(x_0, y_0) = (1, 1)$, cuja imagem está numa vizinhança de $z_0 = 1$, logo o gráfico estará numa vizinhança de $(1, 1, 1)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$.

$$6. f_x = \frac{-z}{x(1+ze^z)}; f_y = \frac{-z}{y(1+ze^z)}$$

$$7. f_x = \frac{-z^2}{2xz - 3y - \operatorname{sen} z}; f_y = \frac{3z}{2xz - 3y - \operatorname{sen} z}$$

$$8. \text{Reta tangente: } x + y + \sqrt{2}z = 2; \text{ reta normal: } (x, y, z) = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) + \lambda(1, 1, \sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$9. \text{(a) } \nabla f(P) = \left(\frac{2x^*}{a^2} + \frac{2y^*}{b^2} + \frac{2z^*}{c^2} \right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x^* = y^* = z^* = 0. \text{ Substitua esses valores na equação do elipsóide e verifique que não é satisfeita.}$$

$$\text{(b) } 6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$$

$$\text{(c) } \frac{x^*x}{a^2} + \frac{y^*y}{b^2} + \frac{z^*z}{c^2} = 1$$

$$10. z = x - 1$$

$$11. \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$$

$$12. \text{ Considere } F(x, y, z) = f(u, v). \text{ Sabendo-se que } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \text{ aplicando essas}$$

equações no lado esquerdo da equação a ser demonstrada e simplificando-a, obtém-se: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right)$. Aplicando a regra da cadeia em $f(u, v)$ para determinar $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$

e $\frac{\partial F}{\partial z}$, substituindo e simplificando, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^\lambda}{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\lambda z}{x^\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \lambda z$.