

LISTA 16

1. Calcule $\iint_R (x + y) \, dx \, dy$, onde R é o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ e $(3, 1)$.
(sugestão: faça a mudança de variáveis $x = u + v$, $y = v$)
2. Considere a transformação do plano uv no plano xy definida por $T(u, v) = (x, y) = (u + v, u^2 - v)$.
Seja R_{uv} a região do plano uv limitada pelos eixos u e v e pela reta $u + v = 2$. Seja $R_{xy} = T(R_{uv})$, a imagem de R_{uv} por T .
(a) Esboce R_{xy} (b) Calcule $\iint_{R_{xy}} \frac{dx \, dy}{\sqrt{1 + 4x + 4y}} \, dx \, dy$
3. Considere a mudança de variáveis $T(u, v) = (x, y)$, onde $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$.
(a) Verifique que se S_{uv} é a região contida no 1º quadrante do plano uv , limitada pelas retas $u = v$, $v = 4u$ e pela hipérbole $uv = 1$, então a fronteira de $S_{xy} = T(S_{uv})$ é o triângulo no plano xy de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(-15/4, 2)$.
(b) Calcule $\iint_{S_{uv}} 4e^{uv} (u^2 + v^2) \, du \, dv$
4. Calcule $\iint_R x \, dx \, dy$, onde R é a região limitada pelas retas $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e pela parábola $y = 1 + x^2$. (sugestão: faça a mudança de variáveis $x = u$, $y = v(1 + u^2)$)
5. Calcule $\iint_R x \, dx \, dy$, onde R é a região limitada pelas retas $x - 2y = 2$, $x - 2y = 3$, $x + 2y = 1$ e $x + 2y = 4$.
6. Se A é a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ prove que $A = \pi ab$.
7. Se V é o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ prove que $V = \frac{4}{3}\pi abc$.
8. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2 = 8y$ pela reta $y = 2$ e pelo eixo y , sabendo que a densidade de massa varia proporcionalmente com a distância à reta $y = -1$.
9. Se uma lâmina L é simétrica em relação a um dos eixos coordenados e se a densidade é integrável e simétrica em relação ao mesmo eixo prove que o centro de massa da lâmina L está nesse eixo.
10. Calcule o centro de massa da lâmina $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1, y \geq 1\}$ se a densidade é proporcional à distância de (x, y) ao eixo x .

Algumas observações sobre definições e nomenclaturas da Física:

Obs.1 Diz-se que a lâmina delgada é homogênea quando a densidade de massa ρ é constante.

Obs.2 Centróide é o centro de massa da lâmina delgada homogênea.

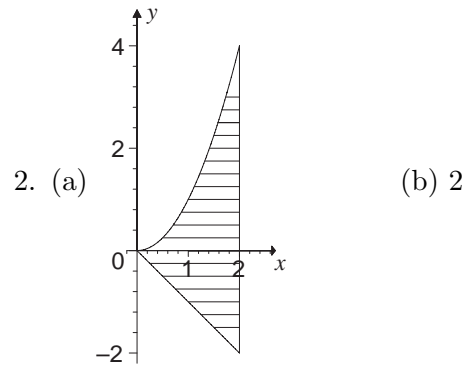
Obs.3 Sabe-se que o momento de inércia I de uma partícula de massa m em relação a um eixo E ou a um ponto P é dado pela fórmula $I = mr^2$, sendo r a distância da partícula ao eixo E ou ao ponto P . Usando Soma de Riemann, é possível provar que para uma lâmina delgada L que tem densidade de massa contínua, o momento de inércia I de L em relação aos eixos coordenados e a origem O são calculados pelas fórmulas, em relação:

$$\text{ao eixo } x, \quad I_x = \iint_L y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy; \quad \text{ao eixo } y, \quad I_y = \iint_L x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy; \quad \text{à origem } O, \quad I_O = I_x + I_y.$$

11. Ache o centróide da semi-circunferência de raio a .
12. Ache os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 para uma lâmina ocupando a região $R : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$, se a função de densidade de massa é dada por $\rho(x, y) = x + 2y$ gramas por centímetro quadrado.

RESPOSTAS DA LISTA 16 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. 4



3. (a) $T(\{(u, v); v = u, 0 \leq u \leq 1\}) = \{(x, y); x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$
 $T(\{(u, v); v = 4u, 0 \leq u \leq 1/2\}) = \{(x, y); 8x + 15y = 0, 0 \leq y \leq 2\}$
 $T(\{(u, v); uv = 1, 1/2 \leq u \leq 1\}) = \{(x, y); y = 2, -15/4 \leq x \leq 0\}$

Logo a transformada da fronteira de S_{uv} é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(-15/4, 2)$. Como a transformada da fronteira de S_{uv} também é a fronteira de S_{xy} , concluímos que a fronteira de S_{xy} é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(-15/4, 2)$.

(b) $\frac{15}{2}$

4. $\frac{99}{4}$

5. $\frac{15}{8}$

6. Faça a mudança de variáveis $u = ax$ e $v = by$ e use coordenadas polares.

7. Idem anterior.

8. $\frac{176}{15}$

9. Sem perda de generalidade, suponha a simetria em relação ao eixo y . A região de integração R é união de duas regiões R_1 e R_2 simétricas em relação ao eixo y e a densidade ρ satisfaz $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$. Precisamos mostrar que $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iint_R x\rho(x, y) \, dx dy}{\iint_R \rho(x, y) \, dx dy} = \frac{\iint_{R_1} x\rho(x, y) \, dx dy + \iint_{R_2} x\rho(x, y) \, dx dy}{\iint_R \rho(x, y) \, dx dy} = \\ &= \frac{\iint_{R_1} x\rho(x, y) \, dx dy - \iint_{R_2} (-x)\rho(x, y) \, dx dy}{\iint_R \rho(x, y) \, dx dy} = \frac{\iint_{R_1} x\rho(x, y) \, dx dy - \iint_{R_2} (-x)\rho(-x, y) \, dx dy}{\iint_R \rho(x, y) \, dx dy} = \\ &= \frac{\iint_{R_1} x\rho(x, y) \, dx dy - \iint_{R_1} (x)\rho(x, y) \, dx dy}{\iint_R \rho(x, y) \, dx dy} = 0 \end{aligned}$$

10. $\left(0, \frac{3\pi}{32}\right)$

11. A semi-circunferência de raio a e base $2a$ tem o centróide situado no raio perpendicular à base a uma distância $\frac{4a}{3\pi}$ dessa base.

12. $I_x = \frac{56}{15}$; $I_y = \frac{8}{3}$; $I_O = \frac{32}{5}$