

LISTA 18

1. Calcule $\iiint_U z \, dx \, dy \, dz$, onde U é o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$.

Nos exercícios 2. e 3. cada integral iterada representa uma integral tripla numa região R . Descreva R e calcule as integrais.

2. $\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z \, dz \, dx \, dy$ 3. $\int_0^1 \int_{2x}^{1+x} \int_z^{x+z} x \, dy \, dz \, dx$

Use coordenadas cilíndricas para calcular as integrais dos exercícios 4. e 5.

4. $\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$, onde $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

5. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

Use coordenadas esféricas para calcular as integrais dos exercícios 6. e 7.

6. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$

7. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx$

8. Calcule $\iiint_S z\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, $S = \{(x, y, z); (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$.

9. Exprima a integral $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_{-r^2}^4 \frac{zr^3}{4 + r \, \text{sen} \, \theta} \, dz \, dr \, d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares.

10. Exprima a integral $\int_0^\pi \int_{3\pi/4}^\pi \int_0^1 \rho^5 \cos \theta \, \text{sen}^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares.

11. Exprima a integral $\int_0^\pi \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r^2 \, \text{sen} \, \theta \, dz \, dr \, d\theta$ como integral iterada em coordenadas esféricas.

12. Calcule, usando coordenadas esféricas, $\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$, onde S é o sólido acima do cone $z = -\sqrt{3x^2 + 3y^2}$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

13. Calcule a integral de $f(x, y, z) = z$ sobre a região limitada pelo cone $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ e pelo semi-hiperbolóide $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

14. Calcule $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \frac{z}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \, dz \, dy \, dx$.

15. Calcule $\int_1^2 \int_0^x \int_0^{x^2+y^2} \frac{z}{(x^2 + y^2)^2} \, dz \, dy \, dx$.

16. Calcule $\iiint_S \cos \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \, dV$, $S = \{(x, y, z), 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36\}$.

17. Calcule $\iiint_S \operatorname{sen} z \, dV$, $S = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq 4x^2 + 4y^2, 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, x \leq \sqrt{2}/2\}$.

Nos exercícios 18. e 19. exprima a integral dada em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas.

18. $\iiint_S \sqrt{81 - x^2 - y^2 - z^2} \, dx \, dy \, dz$, S é o sólido interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$, entre $z = 0$ e $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

19. $\iiint_S \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1} \, dx \, dy \, dz$, $S = \{(x, y, z); z \leq \sqrt{(x^2 + y^2)/3}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 12\}$.

20. Sejam $0 < k < R$ constantes. Calcule o volume da porção da esfera $\{(x, y, z); k \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$.

21. Use a mudança de variáveis $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, a, b, c constantes positivas, para provar que o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$.

22. Sejam T a transformação linear $T(u, v, w) = (2u + v - 2w, u + 2v + 2w, 2u - v + w) = (x, y, z)$, R_{uvw} uma região do espaço no sistema uvw , $R_{xyz} = T(R_{uvw})$ e f uma função real integrável.

Calcule $\iiint_{R_{uvw}} f \, du \, dv \, dw$, sabendo-se que $\iiint_{R_{xyz}} f \, dx \, dy \, dz = 3$.

23. Encontre a massa do sólido limitado pelos cilindros $z = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ e pelos planos $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$ cuja densidade varia com o produto das distâncias aos três planos coordenados.

24. Determine o centro de massa de um cone (o sólido) circular reto de base R e altura h , cuja densidade é proporcional à distância até a base do cone.

Algumas observações sobre definições e nomenclaturas da Física:

Obs.1 Diz-se que um corpo sólido é homogêneo quando a densidade de massa ρ é constante.

Obs.2 Centróide é o centro de massa de um corpo sólido homogêneo.

Obs.3 Sabe-se que o momento de inércia I de uma partícula de massa m em relação a um eixo E ou a um ponto P é dado pela fórmula $I = mr^2$, sendo r a distância da partícula ao eixo E ou ao ponto P . Usando Soma de Riemann, é possível provar que para um corpo sólido S que tem densidade de massa contínua, o momento de inércia I de S em relação aos eixos coordenados e a origem O são calculados pelas fórmulas, em relação:

ao eixo x , $I_x = \iiint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \, dz$; ao eixo y , $I_y = \iiint_S (x^2 + z^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \, dz$;

ao eixo z , $I_z = \iiint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \, dz$; à origem O , $I_O = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$.

25. Calcule, em função da massa M , o momento de inércia do cubo homogêneo em relação a um eixo que contém uma das arestas.

26. Considere o cilindro homogêneo S de massa M , onde $S = \{(x, y, z); (x - a)^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$.

(a) Calcule o momento de inércia em relação à reta $x = a, y = 0$.

(b) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z . (Dê as respostas em função de M)

27. Calcule o centróide do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

28. Calcule o centróide da região limitada pela esfera $\rho = a$ e pelo cone $\varphi = a$.

RESPOSTAS DA LISTA 18

1. $1/24$

5. $\pi/30$

2. $47/24$

6. π

3. $1/12$

7. $16\pi/5$

4. 18π

8. $256/9$

9. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-x^2-y^2}^4 \frac{z(x^2+y^2)}{4+y} dz dy dx$

10. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} x(x^2+y^2+z^2) dz dy dx.$

11. $\int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^5 \rho^3 \text{sen}^2 \varphi \text{sen} \theta \, d\rho d\varphi d\theta.$

12. $8\pi + 4\pi\sqrt{3}$

16. $\frac{4\pi}{3}(\text{sen}(216) - \text{sen}(1))$

13. $\pi/4$

14. $\pi/24$

17. $\frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{\text{sen}(4)}{4} \right)$

15. $3/4$

18. $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r} r\sqrt{81-r^2-z^2} dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{6}{\text{sen} \varphi + \cos \varphi}} f d\rho d\varphi d\theta +$
 $+ \int_0^{2\pi} \int_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\pi/2} \int_0^{2 \csc \varphi} f d\rho d\varphi d\theta, \quad f = \rho^2 \sqrt{81 - \rho^2} \text{sen} \varphi$

19. $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{-\sqrt{12-r^2}}^{r/\sqrt{3}} r\sqrt[3]{r^2-1} dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_3^{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{12-r^2}}^{\sqrt{12-r^2}} r\sqrt[3]{r^2-1} dz dr d\theta =$
 $\int_{\pi/6}^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt[3]{\rho^2 \text{sen} 2\varphi - 1} \rho^2 \text{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta$

20. $\frac{2\pi}{3} (R^3 - 2kR^2 + k^3)$

25. $\frac{2a^2}{M}$

22. $\frac{1}{7}$

26. (a) $\frac{Ma^2}{2}$ (b) $\frac{3Ma^2}{2}$

23. $\frac{k}{28}$

27. $\frac{1}{4}(1, 1, 1)$

24. $\left(0, 0, \frac{3h}{5} \right)$

28. $\frac{3a}{8} (0, 0, 1 + \cos a)$