SEGUNDA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

http://www.professores.uff.br/hjbortol/

GMA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Nome legível: ____________________

Assinatura: ____________________

[01] (2.0) Calcule a derivada da função $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{\text{arcsen}\,(\ln(x))}}{\text{tg}\,(x^2+1) + 3^x}$. Não é preciso simplificar a sua resposta!

Solução. Temos que

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\text{arcsen}(\ln(x))}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x)}}\,\dfrac{1}{x}\,(\text{tg}(x^2+1)+3^x) - \sqrt{\text{arcsen}(\ln(x))}\,(\sec^2(x^2+1)\,2\,x + 3^x\,\ln(3))}{(\text{tg}(x^2+1)+3^x)^2}.$$

[02] (2.0) Seja $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação

$$x\,\text{sen}(2\,y) = y\,\cos(2\,x).$$

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p)) = (\pi/4, \pi/2)$.

Solução. Se $y = f(x)$, então $x\,\text{sen}(2\,f(x)) = f(x)\,\cos(2\,x)$. Derivando dos dois lados, obtemos que

$$\text{sen}(2\,f(x)) + 2\,x\,\cos(2\,f(x))\,f'(x) = f'(x)\,\cos(2\,x) - 2\,f(x)\,\text{sen}(2\,x).$$

Fazendo $x = \pi/4$ e $f(x) = f(\pi/4) = \pi/2$, obtemos que

$$\text{sen}\,(\pi) + \frac{\pi}{2}\cos(\pi)\,f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Uma vez $\cos(\pi/2) = 0$, $\text{sen}(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ e $\text{sen}(\pi) = 0$, concluímos que

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p)) = (\pi/4, \pi/2)$ é dada por

$$y = f(p) + f'(p)\cdot(x-p) = \frac{\pi}{2} + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\,x.$$

[03] (2.0) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 inversível. Sabe-se que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f'(1) = 10$, $f'(2) = 11$ e $f'(3) = 12$. Use o teorema da função inversa para calcular $(f^{-1})'(3)$.

Solução. Pelo teorema da função inversa, temos que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{11}.$$

Note que $f^{-1}(3) = 2$, pois $f(2) = 3$.

[04] (2.0) A posição de uma partícula no plano é dada por $(x(t), y(t))$, com $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funções de classe C^1. Sabendo que

$$\frac{dx}{dt}(t) = 1 \text{ m/s} \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dt}(t) = 5 \text{ m/s}$$

para todo tempo t, calcule a taxa de variação da distância da partícula até a origem $(0,0)$ em função do tempo quando ela passa pelo ponto $(5,12)$.

Solução. Denotando-se por $f(t)$ a distância do ponto $(x(t), y(t))$ até a origem, vale que

$$[f(t)]^2 = [x(t)]^2 + [y(t)]^2.$$

Derivando dos dois lados, obtemos que $2\, f(t)\, f'(t) = 2\, x(t)\, x'(t) = 2\, y(t)\, y'(t)$, isto é,

$$f(t)\, f'(t) = x(t)\, x'(t) + y(t)\, y'(t).$$

No instante de tempo t_0 em que $(x(t_0), y(t_0)) = (5, 12)$, vemos que

$$f(t_0)\, f'(t_0) = x(t_0)\, x'(t_0) + y(t_0)\, y'(t_0) = (5)\,(1) + (12)\,(5) = 65.$$

Uma vez que

$$f(t_0) = \sqrt{[x(t_0)]^2 + [y(t_0)]^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

concluímos que a taxa de variação da distância da partícula até a origem $(0,0)$ em função do tempo quando ela passa pelo ponto $(5,12)$ é dada por

$$f'(t_0) = \frac{65}{13} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}.$$

[05] (2.0) Calcule o polinômio de Taylor de ordem 3 no ponto $p = 0$ da função

$$y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Solução. Note que

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad f'''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Assim, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 1$. Assim, o polinômio de Taylor de ordem 3 no ponto $p = 0$ da função $y = f(x)$ é dado por

$$y = f(0) + f'(0)\,(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}\,(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,(x-0)^3. = x + \frac{x^3}{6}.$$

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 02/11/2008.