GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

TERCEIRA VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Cálculo I –A–

Humberto José Bortolossi

http://www.professores.uff.br/hjbortol/

Nome legível: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Se você estiver interessado em participar do concurso de monitoria de Cálculo I -A- no próximo ano, por favor, preencha os dados a seguir. Se você estiver interessado em participar de um projeto de elaboração de *softwares* matemáticos para o ensino médio (com recebimento de bolsa de estudos), também preencha os dados a seguir.

E-mail: ______________________________

Telefones fixo e celular: ______________________________

[01] Considere a função $y = f(x) = x \cdot e^{\left(-x^2\right)}$ definida em $\mathbb{R}$.

(a) (0.5) Determine, caso existam, as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

Solução. A interseção do gráfico com o eixo y é obtida fazendo-se $x = 0$. Como $f(0) = 0$, segue-se que o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $(0, 0)$. A interseção do gráfico com o eixo x é obtida fazendo-se $f(x) = 0$. Mas

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot e^{\left(-x^2\right)} = 0.$$

Como a função exponencial é sempre não nula, segue-se que $x = 0$. Logo, o gráfico de f intercepta o eixo x apenas no ponto $(0, 0)$.

(b) (0.5) Determine se o gráfico de f possui alguma simetria: a função f é par, ímpar ou periódica?

Solução. A função f não é par, pois $f(-1) = -e^{-1} \neq e^{-1} = f(+1)$. A função é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{\left(-(-x)^2\right)} = -x \cdot e^{\left(-x^2\right)} = -f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f não é periódica.

(c) (1.0) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

Solução. Vamos determinar primeiro as assíntotas horizontais. Observe que

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{\left(-x^2\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{(x^2)}} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{(x^2)}} = 0^+$$

onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Do mesmo modo,

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{\left(-x^2\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{\left(x^2\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{\left(x^2\right)}} = 0^-.$$

Concluímos assim que a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f. Agora, como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

(d) (1.0) Determine os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente.

Solução. Temos que

$$f'(x) = e^{\left(-x^2\right)} + x \cdot (-2\,x) \cdot e^{\left(-x^2\right)} = (1 - 2\,x^2) \cdot e^{\left(-x^2\right)}.$$

Como $e^{\left(-x^2\right)} > 0$ para todo $x \in D$, o sinal de f' é dado pelo sinal da expressão $1 - 2\,x^2$: $1 - 2\,x^2 > 0$ para $-\sqrt{1/2} < x < +\sqrt{1/2}$ e $1 - 2\,x^2 < 0$ para $x < -\sqrt{1/2}$ ou $x > +\sqrt{1/2}$. Assim, a função f é crescente no intervalo $(-\sqrt{1/2}, +\sqrt{1/2})$ e ela é decrescente nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{1/2})$ e $(+\sqrt{1/2}, +\infty)$.

(e) (0.5) Determine os pontos críticos de f e os pontos de máximo e mínimo locais de f, caso existam.

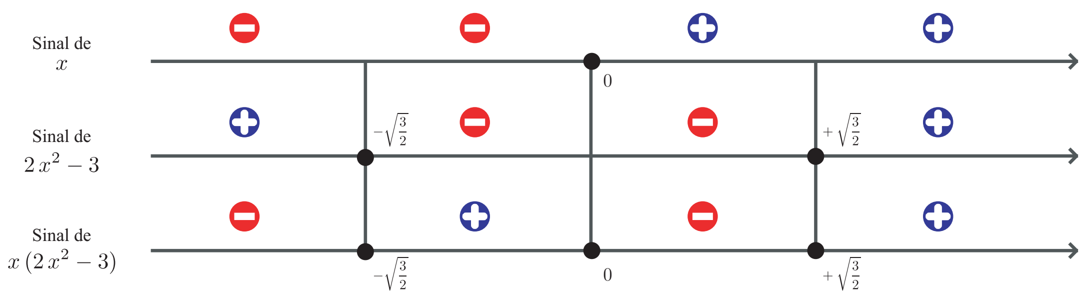
Solução. No item anterior, vimos que os únicos pontos críticos da função f são $x = -\sqrt{1/2}$ e $x = +\sqrt{1/2}$. Como em $x = -\sqrt{1/2}$ o sinal da derivada muda de $-$ para $+$, concluímos que $x = -\sqrt{1/2}$ é ponto de mínimo local de f em D. Como em $x = +\sqrt{1/2}$ o sinal da derivada muda de $+$ para $-$, concluímos que $x = +\sqrt{1/2}$ é ponto de máximo local de f em D.

(f) (1.0) Determine os intervalos onde f é côncava para cima (convexa), os intervalos onde f é côncava para baixo e, caso existam, os pontos de inflexão do gráfico de f.

Solução. Temos que

$$f''(x) = -4\,x \cdot e^{\left(-x^2\right)} + (1 - 2\,x^2) \cdot (-2\,x) \cdot e^{\left(-x^2\right)} = 2\,x\,(2\,x^2 - 3)\,e^{\left(-x^2\right)}.$$

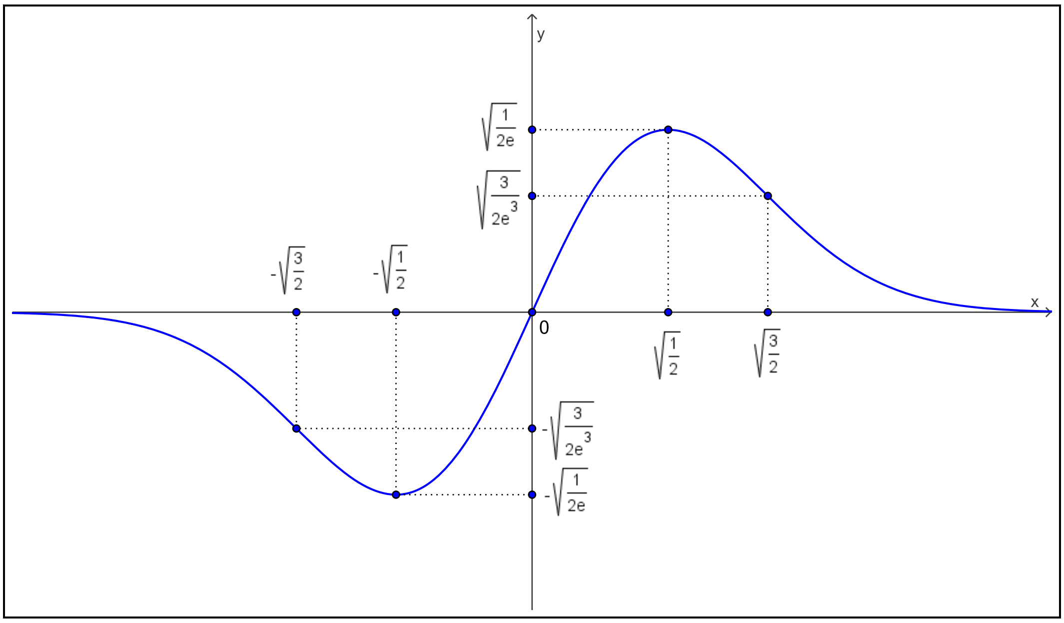
Como $e^{\left(-x^2\right)} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que o sinal de f'' é determinado pelo sinal da expressão $x\,(2\,x^2 - 3)$:



Desta maneira, f é côncava para cima nos intervalos $(-\sqrt{3/2}, 0)$ e $(+\sqrt{3/2}, +\infty)$ e f é côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{3/2})$ e $(0, +\sqrt{3/2})$. Como ocorreu mudança de concavidade em $-\sqrt{3/2}$, 0 e $+\sqrt{3/2}$ (o sinal da derivada segunda mudou nestes pontos), vemos que $(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/(2\,e^3)})$, $(0, 0)$ e $(+\sqrt{3/2}, +\sqrt{3/(2\,e^3)})$ são os únicos pontos de inflexão do gráfico de f.

(g) (1.0) Usando as informações dos itens anteriores, faça um esboço do gráfico de f. **No seu desenho você deve indicar explicitamente os pontos críticos e os pontos de inflexão, caso existam.**

Solução. Um esboço do gráfico de f é apresentado na figura abaixo.



[02] (1.5) Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\,x} + \sqrt[3]{x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Solução. Temos que

$$
\begin{aligned}
y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x} + \sqrt[3]{x} \quad &\Rightarrow \quad y = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x} + \sqrt[3]{x} \right) dx \\
&\Rightarrow \quad y = \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{1/3}\,dx \\
&\Rightarrow \quad y = \ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|x|) + \frac{3}{4}x^{4/3} + C \\
&\Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}\ln(|x|) + \frac{3}{4}x^{4/3} + C.
\end{aligned}
$$

Quando $x = 1$, $y = 2$. Logo

$$2 = \frac{3}{2}\ln(|1|) + \frac{3}{4}(1)^{4/3} + C = \frac{3}{4} + C.$$

Sendo assim, $C = 2 - 3/4 = 5/4$. Conseqüentemente,

$$y = \frac{3}{2}\ln(|x|) + \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{5}{4}.$$

[03] (1.5) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{tg}(2\,x))^x$.

Solução. Temos que

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{tg}(2\,x))^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln((\mathrm{tg}(2\,x))^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\,\ln(\mathrm{tg}(2\,x))} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\,\ln(\mathrm{tg}(2\,x)))}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (x \, \ln(\text{tg}(2\,x))) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{tg}(2\,x))}{\dfrac{1}{x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\text{tg}(2\,x)}\,\sec^2(2\,x)\,2}{-\dfrac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{2\,x}{\text{sen}(2\,x)}\,\frac{-x}{\cos(2\,x)}\right],
\end{aligned}$$

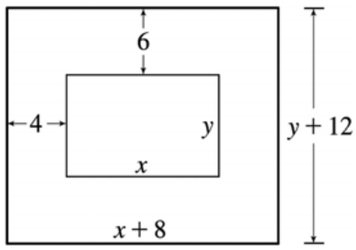
onde, em $(*)$, usamos a regra de L'Hôpital. Como $\lim_{u\to 0}(u/\,\text{sen}(u)) = 1$ (pois $\lim_{u\to 0}(\text{sen}(u)/u) = 0$) e $\lim_{x\to 0}\cos(2\,x) = \cos(0) = 1$, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+} (x \, \ln(\text{tg}(2\,x))) = 0.$$

Desta maneira, $\lim_{x\to 0^+}(\text{tg}(2\,x))^x = e^0 = 1$.

[04] (1.5) As bordas de cima e de baixo de um pôster tem 6 cm e as bordas laterais medem 4 cm. Sabe-se que a área do material impresso sobre o pôster deve ter 384 cm^2. Encontre as dimensões do pôster de menor área que satisfaz estas exigências.

Solução. Sejam x e y as dimensões da base e da altura da área do material impresso, respectivamente.



A área do pôster é dada por $A = (x + 8)(y + 12)$. Como $x\,y = 384$, segue-se que $y = 384/x$ e, portanto,

$$A = A(x) = (x+8)\left(\frac{384}{x} + 12\right) = 12\left(40 + x + \frac{256}{x}\right),$$

para $x > 0$. Uma vez que $A'(x) = 12\,(1 - 256/x^2)$, o único ponto crítico de A no domínio de A é $x = 16$. Como $A'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 16)$ e $A'(x) > 0$ para todo $x \in (16, +\infty)$, concluímos que $x = 16$ é ponto de mínimo local de A. Mas, pelo exercício [05] da lista 17, podemos concluir $x = 16$ é, de fato, ponto de mínimo global de A. Assim, as dimensões do pôster de menor área são $x + 8 = 24$ cm e $y + 12 = 384/x + 12 = 36$ cm.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 04/12/2008.