

# Cálculo I

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidade Federal Fluminense

Aula 9

2 de setembro de 2008

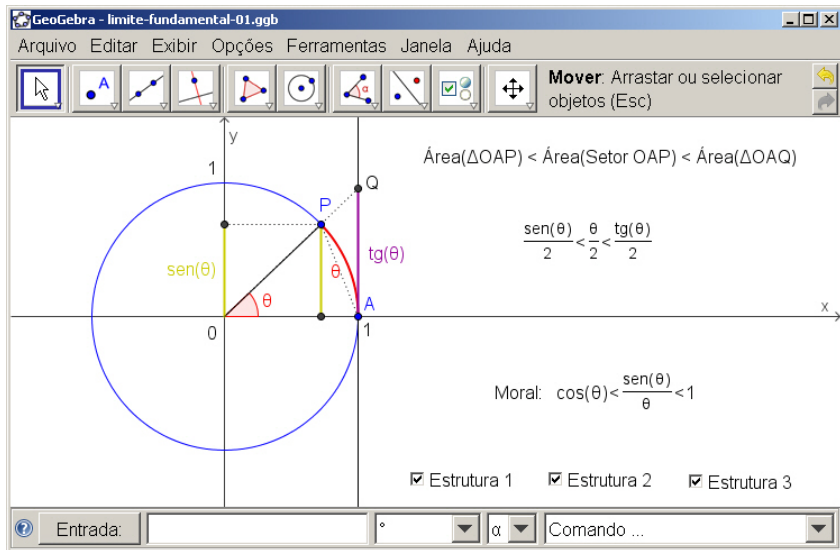
# Limites fundamentais

## Teorema

Se  $x$  é medido em radianos, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

# Um limite trigonométrico fundamental



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

# Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\theta} \\ &\stackrel{(x=2\theta)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 2(1) = 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\theta} \\ &\stackrel{(x=2\theta)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 2(1) = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\theta}$$

$$\stackrel{(x=2\theta)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 2(1) = 2.$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\theta}$$

$$\stackrel{(x = 2\theta)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 2(1) = 2.$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right) = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\theta} \\ &\stackrel{(x=2\theta)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 2(1) = 2.\end{aligned}$$

# Exemplo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(3x)}{x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\text{sen}(3x)}{3x}}{5 \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(3x)}{x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\text{sen}(3x)}{3x}}{5 \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(3x)}{x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\text{sen}(3x)}{3x}}{5 \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(3x)}{x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\text{sen}(3x)}{3x}}{5 \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} \\ &= \frac{3(1)}{5(1)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \cos(x)} \right] = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

## Teorema

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828459045235 \dots$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: dívida de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando 1 período de 12 meses:

$$1 + 1 = 2.$$

- Valor do dinheiro considerando 2 períodos de 6 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

- Valor do dinheiro considerando 3 períodos de 4 meses:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370.$$

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

# Motivação: empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459045235 \dots$ ,  
o valor do dinheiro no tempo de um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano, com  
pagamentos mensais, é  $e$ .

# Motivação: empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1/n\right)^n = e = 2.718281828459045235\dots$ , o valor justo do pagamento um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de  $e = 2.718281828459045235\dots$  reais.

# Motivação: empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

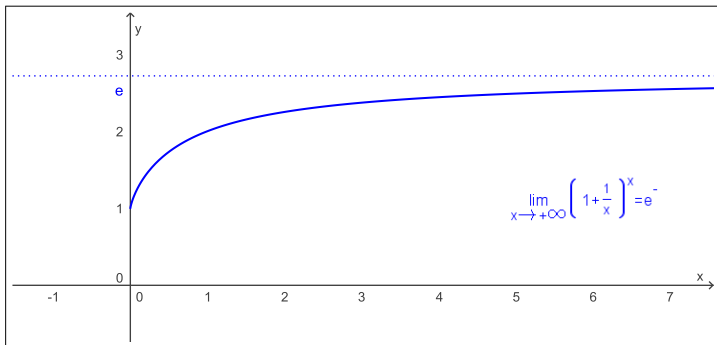
- Moral: como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1/n\right)^n = e = 2.718281828459045235\dots$ , o valor justo do pagamento um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de  $e = 2.718281828459045235\dots$  reais.

# Motivação: empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano

- Valor do dinheiro considerando  $n$  períodos de  $12/n$  meses:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Moral: como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1/n\right)^n = e = 2.718281828459045235\dots$ , o valor justo do pagamento um empréstimo de R\$ 1.00 a 100% ao ano após 1 ano deveria ser de  $e = 2.718281828459045235\dots$  reais.



$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u &\stackrel{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 \\ &= e^2. \end{aligned}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u \stackrel{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2.$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u \stackrel{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^u &\stackrel{(x = u/2)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 \\ &= e^2. \end{aligned}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{1/u} \stackrel{(x=1/u)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{1/u} \stackrel{(x=1/u)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{1/u} \stackrel{(x=1/u)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$