Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2018-1
Volume: método dos discos
Volume: método das cascas
Comprimento de arco

Em cada um dos exercícios 1 a 6 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método dos discos circulares, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

1. $R: \; y = x^3, \; y = 0, \; x = 2;$
   $E:$ eixo x
2. $R: \; y = \ln x, \; y = 0, \; x = e^2;$
   $E:$ eixo y
3. $R: \; y = x^2, \; x + y = 2;$
   $E:$ eixo x
4. $R: \; y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2;$
   $E:$ reta $y = 4$
5. $R: y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};$
   $E:$ reta $y = -1$
6. $R: \; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1;$
   $E:$ eixo x

Em cada um dos exercícios 7 a 10 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método das cascas cilíndricas, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

7. $R: \; y = \dfrac{1}{4 - x^2}, \; x = 0, \; x = 1, \; y = 0;$
   $E:$ eixo y
8. $R: \; y = x^2, \; x = y^2;$
   $E:$ reta $x = -2$
9. $R: \; x = y^2, \; x = 0, \; y = 1;$
   $E:$ reta $y = 2$
10. $R: \; y = \ln x, \; y = 0, \; x = e^2;$
    $E:$ eixo x

Em cada um dos exercícios 11 a 14 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Calcule, por dois métodos distintos, o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

11. $R: \; y = x^3, \; y = 0, \; x = 2;$
    $E:$ eixo y
12. $R: \; y = \dfrac{x}{2}, \; y = \sqrt{x};$
    $E:$ eixo x
13. $R: \; xy = 4, \; x + y = 5;$
    $E: \; y = 1$
14. $R: \; y = \ln x, \; y = \dfrac{x-1}{e-1};$
    $E:$ eixo x
15. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x, pelo método que achar conveniente.

$$R: \begin{cases} y = \dfrac{x}{4} + 1, & \text{se} \quad -4 \leq x < 0 \\ y = \sqrt{1 - x^2}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

16. Calcule o comprimento de arco do gráfico de $y = x^2$, desde o ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$.
17. Calcule o comprimento de arco do gráfico da função $g(y) = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{1}{4y}$, de $(g(1), 1)$ até $(g(2), 2)$.

RESPOSTAS DA LISTA 6

1. $\displaystyle\int_0^2 \pi\left(x^3\right)^2\ dx = \frac{128\pi}{7}$

2. $\displaystyle\int_0^2 \pi\left(\left(e^2\right)^2-(e^y)^2\right)\ dy = \frac{\pi\left(3e^4+1\right)}{2}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^1 \pi\left((-x+2)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx = \frac{72\pi}{5}$

4. $\displaystyle\int_{-1}^2 \pi\left(\left(x^2-2x-4\right)^2-\left(4-x^2-4\right)^2\right)dx = 45\pi$

5. $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi\left((1+\cos x)^2-(1+\operatorname{sen} x)^2\right)\ dx = \left(4\sqrt{2}-3\right)\pi$

6. $\displaystyle 2\int_0^1 \pi\left(\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx = \frac{32\pi}{105}$

7. $\displaystyle\int_0^1 2\pi x\ \frac{1}{4-x^2}\ dx = \pi(\ln 4-\ln 3)$

8. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(x+2)\left(\sqrt{x}-x^2\right)\ dx = \frac{49\pi}{30}$

9. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(2-y)y^2\ dy = \frac{5\pi}{6}$

10. $\displaystyle\int_0^2 2\pi y\left(e^2-e^y\right)\ dy = 2\pi\left(e^2-1\right)$

11. $\displaystyle\int_0^8 \pi\left(2^2-(\sqrt[3]{y})^2\right)dy = \int_0^2 2\pi x\ x^3\ dx = \frac{64\pi}{5}$

12. $\displaystyle\int_0^4 \pi\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)dx = \int_0^2 2\pi y\left(2y-y^2\right)dy = \frac{8\pi}{3}$

13. $\displaystyle\int_1^4 \pi\left((5-x-1)^2-\left(\frac{4}{x}-1\right)^2\right)dx = \int_1^4 2\pi(y-1)\left(5-y-\frac{4}{y}\right)dy = 2\pi(8\ln 2-3)$

14. $\displaystyle\int_1^e \pi\left((\ln x)^2-\left(\frac{x-1}{e-1}\right)^2\right)dx = \int_0^1 2\pi y\left(1+(e-1)y-e^y\right)dy = \frac{\pi(2e-5)}{3}$

15. $\displaystyle\int_{-4}^0 \pi\left(\frac{x}{4}+1\right)^2 dx + \int_0^1 \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_0^1 2\pi y\left(4-4y+\sqrt{1-y^2}\right)dy = 2\pi$

16. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}$

17. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+\left(y^2-\frac{1}{4y^2}\right)^2}\ dy = \frac{59}{24}$