



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7 - 2018-1

Integral imprópria

Nos exercícios 1 a 12 use a definição para verificar se a integral imprópria converge ou diverge. Calcule o valor das integrais impróprias que convergem.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$

5. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}$

9. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

6. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$

10. $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$

3. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

7. $\int_0^{\infty} e^{-t} \sin t dt$

11. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4} dx$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

12. $\int_0^{\infty} e^{-st} \sinh t dt, \quad s > 1$

13. Calcule a área da região R limitada pela curva de equação $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ e por sua assíntota, situada à direita do eixo y .

14. Calcule a área da região R situada no primeiro quadrante e abaixo da curva de equação $y = e^{-x}$.

Nos exercícios 15 a 23 discuta a convergência da integral $\int_1^{\infty} f(x)$ para a função f dada.

15. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

18. $f(x) = \frac{|\sin x|}{x^2}$

21. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+x^2}$

16. $f(x) = e^{-x} \ln x$

19. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+x^2+1}$

22. $f(x) = e^x \ln x$

17. $f(x) = \frac{1}{x+e^x}$

20. $f(x) = \frac{2+\sin x}{x}$

23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

(compare com $\frac{1}{e^x}$)

(compare com $\frac{1}{x}$)

(compare com $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}$)

24. Discuta a convergência de $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x}$ (Sugestão: Para $s > 1$, compare com $\frac{1}{x^s}$; para $s = 1$, calcule a integral; para $s < 1$, compare com $\frac{1}{x \ln x}$)

Nos exercícios 25 a 31 discuta a convergência das integrais impróprias.

25. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}} dx$
(compare com $\frac{x^2}{\sqrt{x^8}}$)

28. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
(compare com $\frac{1}{\sqrt{x}}$)

26. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s}$
(calcule a integral)

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x \sin x}$
(compare com $\frac{1}{x}$)

27. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x \ln x}$
(compare com $\frac{1}{x+x \ln x}$)

30. $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-4} dx$
(calcule a integral)

31. $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}} dx$
(discuta $\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}} \right| dx$ e use um teorema)

RESPOSTAS DA LISTA 7

1. 2 3. $\ln 2$ 5. diverge (∞) 7. $\frac{1}{2}$ 9. 1 11. diverge (∞)
2. diverge (∞) 4. 0 6. $\frac{\ln 3}{2}$ 8. 2 10. $\frac{2\sqrt{26}}{3}$ 12. $\frac{1}{s^2 - 1}$
13. $2 \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}} dx = \frac{64}{3}$ 14. $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
15. divergente, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \neq 0$
16. convergente, pois $x \geq 1 \implies 0 \leq e^{-x} \ln x \leq e^{-x} x \implies 0 \leq \int_1^\infty e^{-x} \ln x dx \leq \int_1^\infty e^{-x} x dx = \frac{2}{e}$
17. convergente, pois $x \geq 1 > 0 \implies 0 < \frac{1}{e^x + x} < \frac{1}{e^x} \implies 0 < \int_1^\infty \frac{1}{e^x + x} dx < \int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e}$
18. convergente, pois $\forall x \neq 0, 0 \leq \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \implies 0 \leq \int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$
19. divergente, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 + 1} = 1 \neq 0$
20. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \implies \frac{2 + \operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0 \implies \int_1^\infty \frac{2 + \operatorname{sen} x}{x} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$
21. convergente, pois $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \implies 0 \leq \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$
22. divergente, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln x = \infty \neq 0$
23. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \implies \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} > 0 \implies \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} dx = \infty$
24. $s > 1$: convergente, pois $x \geq e \implies 0 < \frac{1}{x^s \ln x} \leq \frac{1}{x^s} \implies 0 < \int_e^\infty \frac{1}{x^s \ln x} dx \leq \int_e^\infty \frac{1}{x^s} dx = \frac{e^{1-s}}{s-1}$
 $s = 1$: divergente, pois $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \infty$
 $s < 1$: divergente, pois $x \geq e > 1 \implies \frac{1}{x^s \ln x} \geq \frac{1}{x \ln x} \implies \int_e^\infty \frac{1}{x^s \ln x} dx \geq \int_e^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \infty$
25. converge, pois $\forall x \neq 0 \implies 0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} < \frac{x^2}{\sqrt{x^8}} = \frac{1}{x^2} \implies 0 < \int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + x^6 + 2}} dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$
26. $s \leq 1$: divergente, pois $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s} dx = \infty$
 $s > 1$: convergente, pois $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s} dx = \frac{1}{s-1}$
27. diverge: $x \geq 1 > 0 \implies \frac{1}{1 + x \ln x} \geq \frac{1}{x + x \ln x} > 0 \implies \int_1^\infty \frac{x}{1 + x \ln x} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x + x \ln x} dx = \infty$
28. convergente, pois $0 < x \leq 1 \implies 0 < \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \implies \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$
29. divergente, pois $0 < x < \frac{\pi}{2} \implies \frac{1}{x \operatorname{sen} x} > \frac{1}{x} > 0 \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \operatorname{sen} x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx = \infty$
30. divergente, pois $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{5}{4(x-2)} - \frac{5}{4(x+2)} \right) dx = \infty$
31. convergente. Justificativa: a função $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}$ é contínua, portanto integrável em $[1, b], b > 0$, o que torna possível aplicar o teorema, $\int_1^\infty |f(x)| dx$ é convergente $\implies \int_1^\infty f(x) dx$ é convergente.
 $x \geq 1 \implies 0 \leq \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} \implies \int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}} \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = 2\sqrt{2} \implies \int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}} \right| dx$ é convergente
 (teorema \implies acima) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}} dx$ é convergente.