



Universidade Federal Fluminense  
EGM - Instituto de Matemática  
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

### LISTA 9 - 2018-1

EDO's de primeira ordem:  
linear e homogênea  
Trajetórias ortogonais  
Algumas aplicações de EDO

Nos exercícios 1 a 8 algumas das equações são lineares de primeira ordem. Identifique-as e ache sua solução geral.

1.  $(1+x)ydx + xdy = 0$
2.  $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
3.  $\frac{dy}{dx} - y \tan(x) = \sin(x)$
4.  $(2y - x^4)dx + xdy = 0$
5.  $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$
6.  $y' + \frac{y}{\sin(x)} - y^2 = 0$
7.  $x^3y' + 4x^2y + e^x = 0$
8.  $\frac{dr}{d\theta} + 2r \cos(2\theta) = \sin(4\theta)$

Nos exercícios 9 e 10 resolva o problema de valor inicial.

9.  $y' - xy = (1 - x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}$ ,  $y(0) = 0$
10.  $(y - 1)x' - 3x = (y - 1)^5$ ,  $x(-1) = 16$
11. Mostre que a equação  $\cos(y)y' + 2x \sin(y) = -2x$  pode ser transformada numa equação linear e resolva o PVI com  $y(0) = 0$ . (sugestão:  $z = \sin(y)$ )

Nos exercícios 12 a 17 verifique quais equações são homogêneas e resolva-as.

12.  $(5x - y)dx + 3xdy = 0$
13.  $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
14.  $(xy + 1)dx + y^2dy = 0$
15.  $xy' + y = 3$
16.  $e^{\frac{y}{x}} + y' - \frac{y}{x} = 0$
17.  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
18. Considere a equação da forma  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$ , onde  $a, b, c, A, B, C$  são constantes reais.

Verifique que:

- (a) quando  $aB - Ab \neq 0$ , pode-se reduzir essa equação em uma equação homogênea nas variáveis  $z$  e  $w$  se  $z = x - h$  e  $w = y - k$ , onde  $h$  e  $k$  são as soluções do sistema linear  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$
- (b) quando  $aB - Ab = 0$  e  $a$  e  $b$  não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis  $x$  e  $z$ , se fizermos a substituição  $z = ax + by$ .
- (c) quando  $aB - Ab = 0$  e  $A$  e  $B$  não simultaneamente nulos, pode-se reduzir essa equação em uma equação de variáveis separáveis nas variáveis  $x$  e  $z$ , se fizermos a substituição  $z = Ax + By$ .

Nos exercícios 19 a 21 use o método desenvolvido acima, para determinar a solução geral das equações.

19.  $y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$
20.  $y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}$
21.  $y' = \frac{y}{x - y - 1}$

22. Resolva o PVI  $y' = \frac{2x + y - 4}{x - y + 1}$ ,  $y(2) = 2$ .

23. Encontre a família de curvas ortogonais à família de parábolas  $y = cx^2$ .

24. Encontre a família de curvas ortogonais à família de elipses  $x^2 + 4y^2 = c$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

25. Encontre a família de curvas ortogonais à família de hipérbolas  $xy = c$ ,  $c \neq 0$ .
26. Encontre a família de curvas ortogonais à família de círculos que contém os pontos  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ .
27. Suponha que a taxa de desintegração de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância existente em cada instante de tempo.
- Numa amostra de uma certa substância quando decorridos 1200 anos há uma perda de 36% dessa substância.
- Escreva a equação diferencial que descreve o processo de desintegração.
  - Determine a constante de desintegração dessa substância.
  - Determine a quantidade da amostra que desaparece em 600 anos.
  - Em quantos anos haverá apenas  $1/50$  da quantidade original da amostra?
  - Lembre que a *meia vida* de uma substância radioativa é o tempo em que uma amostra da substância se desintegra à metade da quantidade original. Determine a meia vida dessa substância.
28. Resolva a equação  $L \frac{dI}{dt} + RI = E \sin(wt)$  onde  $L, R, E$  e  $w$  são constantes e  $I$  é uma função de  $t$ . (Esta função dá a corrente em um circuito de resistência  $R$  e indutância  $L$  impulsionada por um gerador de corrente alternada de frequência  $\frac{w}{2\pi}$  e voltagem máxima  $E$ ).

RESPOSTAS DA LISTA 9 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

- $y(x) = \frac{C}{x} e^{-x}$
  - Não é linear
  - $y(x) = \frac{1}{2} \sec x (\sin^2(x) + C)$
  - $y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$
  - $x(y) = -\frac{1}{y} + Cy^2$
  - Não é linear
  - $y(x) = \frac{1}{x^4} (e^x - xe^x + C)$
  - $r(\theta) = -1 + \sin(2\theta) + Ce^{-\sin(2\theta)}$
  - $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
  - $x(y) = \left( \frac{y^2}{2} - y - \frac{7}{2} \right) (y - 1)^3$ ,  $y < 1$
  - $y(x) = \arcsen(e^{-x^2} - 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
  - $-\frac{5}{2}x + Cx^{\frac{1}{3}}$
  - $y = y(x)$  implícita em  $y^2 = x^2 + Cx$
  - Não é homogênea
  - Não é homogênea
  - $y(x) = -x \ln(\ln(C|x|))$
  - $y = y(x)$  implícita em  $y^2 = 2x^2 \ln(C|x|)$
18. (a) Temos que  $w = w(y) = y - k$  e  $y = y(x)$ , logo  $w = w(y) \Rightarrow w = w(y(x))$ . Mas  $z = x - h$  ou  $x = x(z) = z + h$ . Logo  $w = w(y(x(z)))$ .

Aplicando a regra da cadeia duas vezes obtemos:  $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz}$

Observando que  $\frac{dw}{dy} = 1$  e  $\frac{dx}{dz} = 1$ , concluímos que  $\frac{dw}{dz} = \frac{dy}{dx}$ .

Agora, substituindo  $x$ ,  $y$  e  $\frac{dy}{dx}$  na equação original, obtemos

$$\frac{dw}{dz} = F \left( \frac{a(z+h) + b(w+k) + c}{A(z+h) + B(w+k) + C} \right) = F \left( \frac{az + bw + (ah + bw + c)}{Az + Bw + (Ah + Bk + C)} \right)$$

Supondo que  $aB - Ab \neq 0$ , o sistema  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$  tem solução. Se  $x = h$  e  $y = k$  é a solução desse sistema, encontramos

$$\frac{dw}{dz} = F \left( \frac{az + bwk + 0}{Az + Bwk + 0} \right) \text{ que é uma equação homogênea nas variáveis } z \text{ e } w.$$

(b) Supondo que  $aB = Ab$ ,  $a$  e  $b$  não são simultaneamente nulos, faz-se a substituição  $z = ax + by$ .

Podemos escrever  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) =$

$$F\left(\frac{b(ax + by + c)}{bAx + bBy + bC}\right) = F\left(\frac{b(ax + by + c)}{aBx + bBy + bC}\right) = F\left(\frac{b(ax + by + c)}{B(ax + by) + bC}\right) = F\left(\frac{b(z + c)}{Bz + bC}\right)$$

Temos ainda que  $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$ . Substituindo  $\frac{dy}{dx}$  encontrado acima nesta última equação, obtemos

$$\frac{dz}{dx} = a + bF\left(\frac{b(z + c)}{Bz + bC}\right) \quad \text{que é uma equação de variáveis separáveis nas variáveis } z \text{ e } x.$$

(c) Análogo ao item anterior.

19.  $\arctan \frac{y+5}{x-1} = \frac{1}{2} \ln C ((x-1)^2 + (y+5)^2)$

20.  $y - x - 5 \ln |x + y - 1| = C$

21.  $y$  implícita em  $y \ln(Cy) = 1 - x$

22.  $\sqrt{2} \arctan \left(1 + \frac{(y-2)^2}{2(x-1)^2}\right) = \ln \left(\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}}{2} [(x-1)^2 + (y-2)^2]\right), \quad x > 1$

23.  $x^2 + 2y^2 = C$

24.  $y = Cx^4$

25.  $x^2 - y^2 = C$

26.  $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1$

27. Suponha que  $q(t)$  é a quantidade de substância quando decorridos  $t$  anos e  $q_0$  a quantidade da substância no início de um período de  $t$  anos, isto é,  $q_0 = q(0)$ .

(a)  $\frac{dq(t)}{dt} = kq(t)$ , onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

(b) Resolvendo o PVI, encontra-se  $Q(t) = q_0 e^{kt}$ .

Calculando,  $q(1200) = q_0 e^{k \cdot 1200}$ . Por outro lado, é dado que  $q(1200) = \frac{64}{100} q_0$ .

Resolvendo a equação  $q_0 e^{k \cdot 1200} = \frac{64}{100} q_0$ , encontra-se  $k = \frac{1}{600} \ln \left(\frac{4}{5}\right)$ .

(c) Substituindo o valor de  $k$ , encontra-se  $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600} (\ln(\frac{4}{5})) t}$ .

Calculando, a perda em 600 anos é igual a  $q(0) - q(600) = q_0 - q_0 e^{\frac{600}{600} (\ln(\frac{4}{5}))} = q_0 - \frac{4}{5} q_0 = \frac{1}{5} q_0$ .

Logo em 600 anos a perda é de 20%.

(d)  $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600} (\ln(\frac{4}{5})) t} = \frac{1}{50} q_0$ .

Resolvendo a equação, encontramos  $t = 600 \left(\frac{\ln 2 - \ln 25}{\ln 4 - \ln 5}\right) \cong 6.791, 31$  anos.

(e)  $q(t) = q_0 e^{\frac{1}{600} (\ln(\frac{4}{5})) t} = \frac{1}{2} q_0$ .

Resolvendo a equação, encontramos  $t = 600 \left(\frac{-\ln 2}{\ln 4 - \ln 5}\right) \cong 1.863, 77$  anos.

28.  $I = \frac{E(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} + C e^{-\frac{R}{L} t}$