

Lista 3 de Equações Diferenciais

(Transformada de Laplace)

Professor Javier Solano

Seja f contínua por partes em $[0, \infty)$, de ordem exponencial e tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista. Mostre que $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u) du$. Usando isto, calcule as transformadas de Laplace nos exercícios 1 a 3.

1. $\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}(t)}{t}\right\}$

2. $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos(at) - 1}{t}\right\}, a \in \mathbb{R}$

3. $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{t}\right\}, a \in \mathbb{R}$

4. Encontre uma função $f(t)$ de ordem exponencial cuja derivada $f'(t)$ não seja de ordem exponencial. Pode existir uma função f que não seja de ordem exponencial tal que a sua derivada f' seja de ordem exponencial?

5. Encontre uma função que não seja de ordem exponencial cuja transformada de Laplace esteja definida.

6. Mostre que (lembre que $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$)

(a) $\mathcal{L}\{t^2 y'(t)\} = sY''(s) + 2Y'(s)$

(b) $\mathcal{L}\{t^2 y''(t)\} = s^2 Y''(s) + 4sY'(s) + 2Y(s)$

7. Resolva o problema de valor inicial

$$ty'' - ty' + y = 2; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

Todos os exercícios a seguir são do livro *Equações Diferenciais, vol. 1*, Zill D, Cullen M, 3ª edição

Seção 7.1: 3, 9, 15, 25, 29, 35, 39, 41, 44, 45, 47, 48

Seção 7.2: 3, 9, 13, 17, 25, 31, 33, 35

Seção 7.3: 5, 9, 13, 19, 25, 29, 33, 35, 43, 45-50, 55, 57, 58, 61-64

Seção 7.4: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19, 21, 27, 29, 31, 32, 34, 36

Seção 7.5: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 25, 29, 33, 61

Seção 7.6: 3, 7, 11, 15, 16

Capítulo 7 Revisão: 3-6, 19, 23, 24.

Respostas

1. $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s, s > 0$

2. $F(s) = -\ln \frac{\sqrt{s^2+a^2}}{s}, s > 0$

3. $F(s) = \ln \left| \frac{s+a}{s-a} \right|, s > |a|$