

# Lista 4 de Equações Diferenciais

(Sistemas de equações diferenciais)

Professor Javier Solano

1. Sistemas de equações diferenciais podem ser transformados, algumas vezes, numa única equação de ordem maior. Considere o sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2 \quad x_2' = x_1 - 2x_2$$

- (a) Resolva a primeira equação para  $x_2$  e substitua na segunda equação, obtendo uma equação de ordem 2 para  $x_1$ . Resolva esta equação para  $x_1$  e determine também  $x_2$ .
  - (b) Encontre a solução do sistema que satisfaz as condições  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 3$ .
2. Faça o análogo ao procedimento do exercício anterior para resolver o problema

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 \quad x_2' = 2x_1 - 2x_2 \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = \frac{1}{2}.$$

3. Mostre que a solução geral do sistema  $X'(t) = A(t)X(t) + F(t)$ ,  $t \in I$  é a soma de uma solução particular  $X_p$  desta equação com a solução geral  $X_h$  da equação homogênea correspondente.

4. Considere os vetores  $X_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $X_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$

- (a) Calcule  $W(X_1, X_2)$ .
  - (b) Em quais intervalos  $X_1$  e  $X_2$  são linearmente independentes?
  - (c) Que conclusões podemos tirar dos coeficientes do sistema homogêneo que tem como soluções  $X_1$  e  $X_2$ ?
  - (d) Encontre um sistema de equações homogêneo que tenha  $X_1$  e  $X_2$  como soluções.
5. Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  soluções do sistema  $X'(t) = A(t)X(t)$ ,  $t \in I$ . Suponha que  $A$  é contínua em  $I$  e seja  $t_0 \in I$ . Mostre que só tem duas opções para o Wronskiano:  $W(X_1(t), \dots, X_n(t)) = 0$  para todo  $t \in I$ , ou  $W(X_1(t), \dots, X_n(t)) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

*Dica:* Se  $W(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)) = 0$ , então existem  $c_1, \dots, c_n$  não todas nulas tais que  $c_1X_1(t_0) + \dots + c_nX_n(t_0) = 0$ . Use agora o teorema de existência e unicidade de soluções.

Todos os exercícios a seguir são do livro *Equações Diferenciais, vol. 2*, Zill D, Cullen M, 3ª edição

**Seção 8.2:** 1, 5, 13, 14, 15

**Seção 8.3:** 3, 5, 13, 17, 18, 19, 20, 21

**Seção 8.5:** 1, 5, 9, 12, 15, 18, 19, 23, 25, 27, 31, 35, 36, 37

**Seção 8.6:** 5, 7, 13, 14, 15, 23, 27, 29, 35, 39, 41, 43, 44

**Seção 8.7:** 3, 9

**Seção 8.8:** 9, 15, 21, 23 (Para os exercícios desta seção, encontre primeiro uma matriz fundamental para o sistema homogêneo  $\Phi(t)$  tal que  $\Phi(0) = I$  e aplique então o método de variação de parâmetros para resolver o sistema não homogêneo).

**Seção 8.9:** 1-3, 9-12

**Capítulo 8 Revisão:** 5, 6, 11, 20

**Seção 10.2:** 17-21

## Respostas

1. a)  $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}$ ,  $x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$  b)  $c_1 = \frac{5}{2}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{2}$ .

2.  $x_1 = \frac{11}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}$ ,  $x_2 = \frac{11}{6}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$