

# Exercícios (Cálculo II-B) dos dias 10 e 12/09

Professor Javier Solano

*Diferenciabilidade. Plano tangente.*

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Foi provado na aula que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Então o “plano tangente”, caso estivesse definido, seria  $z = 0$ . Encontre uma curva  $\gamma(t)$  diferenciável que esteja contida no gráfico de  $f$  tal que  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$  e  $\gamma'(0)$  não esteja no plano  $z = 0$ . O que pode concluir deste fato?
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  podem ser contínuas em  $(0, 0)$ ? Justifique

2. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- (b) Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  não é contínua em  $(0, 0)$ .
- (c) Podemos concluir que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ ? Verifique, usando a definição de diferenciabilidade, se  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

3. Identifique a região de  $\mathbb{R}^2$  onde as funções são diferenciáveis.

- (a)  $f(x, y) = e^{xy^2}$
- (b)  $f(x, y) = \arctan(2xy)$

4. Determinar, caso exista, o plano tangente ao gráfico das função  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , no ponto  $(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

5. Determine o plano que seja paralelo ao plano  $z = 2x + y$  e tangente ao gráfico de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

6. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da interseção de  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ , com o plano  $x = 1$  no ponto  $(1, -1, 1)$ .

7. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} & , \text{ se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \text{ se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de  $f$ .
- (b) Calcular, caso existirem,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

8. Determinar o diferencial das funções (a)  $z = \sin^2(x + y)$  (b)  $z = x \arctan(x + 2y)$

9. Determinar o erro decorrente de tomarmos a diferencial  $dz$  como uma aproximação do acréscimo  $\Delta z$ , quando  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y)$  passando de  $(1, 2)$  para  $(1, 01; 2, 01)$ .
10. Considerar um retângulo com lados  $a = 5$  cm e  $b = 2$  cm. Como vai variar, aproximadamente, a diagonal desse retângulo se o lado  $a$  aumentar 0,002 cm e o lado  $b$  diminuir 0,1 cm?
11. Em um setor circular, o ângulo central é  $80^\circ$  e o raio é 20 cm. Reduzindo-se o ângulo de  $1^\circ$ , qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique aproximadamente inalterada? (Lembre que a área do setor circular é igual a  $\frac{\theta r^2}{2}$ , com  $\theta$  em radianos).
12. Encontre um valor aproximado para (a)  $1,02^{3,001}$  (b)  $(0,995)^4 + (2,001)^3$
13. Seja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva diferenciável contida na superfície de nível  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Seja  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Mostre que vale  $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$ .