# Lista 4 de Cálculo II-B

Professor Javier Solano

*Regra da Cadeia. Derivadas parciais de ordem superior. Regra da cadeia para detivadas de ordem superior.*

Todos os exercícios a seguir são do livro *Cálculo B, Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície*, Mirian Buss Gonçalves e Diva Marília Flemming, 2ª edição.

**Seção 4.10:** 1(b, d), 2, 5, 8, 9, 10, 11(b, d), 12, 16, 18, 21, 24, 26, 27(a), 30(a), 35, 40(a, d), 42, 47, 49(a, d)

**Exercícios adicionais**

1. Suponha que para todo $x$, $f(3x, x^3) = \arctan x$.
   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ admitindo que $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 2$.
   (b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.
2. Admita que, para todo $(x, y)$,
$$4y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
   Prove que $f$ é constante sobre a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (*Dica:* A elipse pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$).
3. A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma$ no ponto $\gamma(1)$.
4. Considere a função $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$.
5. $f(t)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que $g(t, f(t)) = 0$ para todo $t$. Suponha que $f(0) = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = 2$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 4$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$, no ponto $\gamma(0)$.
6. Seja $g(t) = f(3t, t^3.e^{2t})$. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$.
   (a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de $f$.
   (b) Calcule $g'(0)$.
7. Sejam $f(x,y) = (xy, x^2 + 2y, 2x)$, $g(u,v,w) = 2w\ln(u+v)$, $h(t) = t^2$, $F(x,y) = (g \circ f)(x,y)$, $H(x,y) = (h \circ F)(x,y)$. Determine $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial H}{\partial x}$.
8. Mostre que a função $u(x.t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, onde $c$ é constante e $F$, $G$ são de classe $C^2$, é solução da equação de onda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
9. Sejam $z = z(x,y)$, $x = e^u \cos v$, $x = e^u \operatorname{sen} v$. Suponha que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.
10. Sejam $f(x,y) = x^5y^4$, $x = 3t$, $y = 2t+1$. Usando a regra da cadeia, calcule $g''(t)$, sendo $g(t) = f(3t, 2t+1)$.
11. Seja $g(u,v) = f(2u+v, u-2v)$, onde $f(x,y)$ é de classe $C^2$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$