Exercícios Aula 08 e 10 de outubro

Professor Javier Solano

Derivadas direcionais. Relaçaõ de gradiente e conjuntos de nível. Gradiente como direção de maior crescimento.

1. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.
   (a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.
   (b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.
2. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2+y^2 = 3$ e paralela à reta $2x+y = 5$.
3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.
   (a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.
   (b) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$.
4. Calcule $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ sendo dados
   (a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e u é o versor de $2\vec{i} + \vec{j}$.
   (b) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e u é o versor de $(3, 4)$.
   (c) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e u é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.
5. Em que sentido e direção a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que sentido e direção a função dada decresce mais rapidamente no ponto dado?
   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, em $(1, 1)$.
   (b) $f(x, y) = \ln \|(x, y\|$, em $(1, -1)$.
6. Seja $f(x, y) = x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$, onde u aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.
7. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção de $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule
   (a) $\nabla f(1, 1)$.
   (b) $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$, onde u é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.
8. Considere a função
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{, se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
   (a) Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$ para todo vetor unitério u.
   (b) Lembre que f não é diferenciável. Assim, existência de derivadas direcionais não implica diferenciabilidade.
9. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defina $F(x, y) = f(x) - y$. Note que o gráfico de f é uma curva de nível de F. Seja (x_0, y_0), com $y_0 = f(x_0)$, um ponto do gráfico de f. Usando ∇F, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f. Esta equação é a mesma que estudou em Cálculo IA?