Lista 7 de Cálculo II-B

Professor Javier Solano

Funções vetoriais de várias variáveis. Diferenciabilidade. Matriz Jacobiana. Regra da Cadeia. Teorema da função inversa. Teorema da função implícita.

Todos os exercícios a seguir são das notas de Funções vetoriais de várias variáveis, do Cederj, dos professores Mário Olivero e Nancy de Souza. As notas estão no site.

Aula 22:
1, 2(a, c, f, g, h), 3-9.

Aula 23:
1-7, 12(a, b, c).

Aula 25:
1-8.

Aula 24:
1, 5-7.

Aula 26:
1-3.

Exercícios adicionais

1. Determine em quais pontos a função é diferenciável. Explique claramente em quais pontos não é diferenciável e qual o motivo para não ser. Se $(x,y) \neq (0,0), (x,y) \neq (1,0)$ e $(x,y) \neq (0,1)$, então

$$f(x,y) = \left(\frac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x^3}{x^2+y^2}, \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} \right),$$

   $f(0,0) = (0,0,1)$, $f(0,1) = (0,0,1/2)$ e $f(1,0) = (-1/2,1,0)$.

2. Sejam $F(x,y,z) = (3x^2 + yz, z + y^3)$ e $G(x,y) = (x^2+y^2, xy, x^3, x+y^3)$.
   (a) Verifique que uma das compostas $F \circ G$ ou $G \circ F$ não está definida.
   (b) Determine $F'(x,y,z)$ e $G'(x,y)$.
   (c) Determine $(F \circ G)'(1,-1)$ ou $(G \circ F)'(1,-1,2)$. A que for possível.

3. Considere as funções $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dadas por

$$f(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u-v}{2}}, \frac{u+v}{2} \right) \qquad g(x,y) = (y + x^2, y - x^2),$$

   onde $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u > v\}$, $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.
   (a) Verifique que $(g \circ f)(u,v) = (u,v)$ para todo $(u,v) \in U$ e $(f \circ g)(x,y) = (x,y)$ para todo $(x,y) \in V$. O que se pode concluir sobre f e g.
   (b) Determine $Df(u,v)$ e $Dg(x,y)$.
   (c) Verifique (fazendo os produtos das matrizes) que $Dg(f(u,v))Df(u,v) = I$ e $Df(g(x,y))Dg(x,y) = I$ para todo $(u,v) \in U$ e $(x,y) \in V$. (I é a matriz identidade 2×2. Sem calcular estes produtos, já era esperado que essas igualdades se verificassem. Por que?

4. Mostre que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são funções diferenciáveis definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y + x = 1 \end{cases} \quad \text{numa vizinhança de } x = 0 \text{ tal que } y(0) = 1,\ z(0) = -1.$$

Calcule $\frac{dy}{dx}(0)$ e $\frac{dz}{dx}(0)$.

Respostas

1. f_1 não é contínua em $(0,1)$, logo f não é diferenciável em $(0,1)$. f_2 não é diferenciável em $(0,0)$, logo f não é diferenciável em $(0,0)$. f_3 é diferenciável em $(1,0)$, assim podemos mostrar que f é diferenciável em $(1,0)$. Nos outros pontos, f é diferenciável (basta mostrar a continuidade das derivadas parciais nestes pontos).

2. (b) $F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & z & y \\ 0 & 3y^2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad G'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ 3x^2 & 0 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$.

   (c) $(G \circ F)'(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & -3 \\ 6 & 11 & 2 \end{pmatrix}$

4. Seja $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-2, x+y-1)$. F é de classe C^1 em R^3. $F(0,1,-1) = (0,0)$. E para $X = x$, $Y = (y,z)$, $\det F_Y(0,1,-1) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Assim podemos aplicar o teorema da função implícita pra escrever $y = y(x)$, $z = z(x)$ para x próximo de 0. Ainda vale $\frac{dy}{dx}(0) = -1$ e $\frac{dz}{dx}(0) = -1$.