

Volume | 2

# Módulo 2

Mario Olivero da Silva  
Nancy de Souza Cardim

Volume | 2

ISBN 978-85-7648-574-2



## Cálculo III

Cálculo III

cederj



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação





Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Cálculo III

Volume 2 - Módulo 2

Mario Olivero da Silva

Nancy de Souza Cardim



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação



Apoio:



# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001  
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Regina Moreth

UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Mario Olivero da Silva  
Nancy de Souza Cardim

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### CAPA

André Dahmer

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Fábio Rapello Alencar

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

Copyright © 2009, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S586c

Silva, Mario Olivero da.

Cálculo III. v. 2 / Mario Olivero da Silva, Nancy de Souza Cardim. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.  
80p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-574-2

1. Funções reais. 2. Limites. 3. Derivadas parciais. 4. Regra da cadeia. 5. Teorema da função inversa. 6. Teorema da função implícita. I. Cardim, Nancy de Souza. II. Título.

CDD: 515.43

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



### SUMÁRIO

<b>Aula 19</b> – Funções vetoriais de várias variáveis _____	<b>1</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 20</b> – Conjuntos de nível e mais alguns exemplos de funções vetoriais ____	<b>15</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 21</b> – Limites e continuidade _____	<b>31</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 22</b> – Derivadas parciais - diferencial - matriz jacobina _____	<b>35</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 23</b> – Regra da cadeia _____	<b>45</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 24</b> – Funções definidas implicitamente _____	<b>59</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 25</b> – Teorema da função inversa _____	<b>67</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	
<b>Aula 26</b> – Teorema da função implícita _____	<b>77</b>
<i>Mario Olivero da Silva / Nancy de Souza Cardim</i>	



## Aula 19: Funções vetoriais de várias variáveis – Introdução

Versão 1.0

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular domínios das funções vetoriais de várias variáveis.
- Representar geometricamente funções do plano no plano.

Vistos a distância (sem trocadilhos), os cursos de cálculo parecem uma espiral. Estamos fazendo e refazendo o mesmo percurso: definições básicas, limites, continuidade, diferenciabilidade (com a Regra da Cadeia), Teorema da Função Inversa e assim por diante, para diferentes tipos de funções. Fizemos isso no caso das funções reais de uma variável real e no caso das funções vetoriais de uma variável real. No início desta disciplina, você estudou o caso das funções reais de várias variáveis.

Muito bem, é hora de dar mais uma volta nessa espiral, acrescentando seu último anel. Vamos estudar as funções vetoriais de várias variáveis. Este é um momento bem especial. De uma certa forma, após ter estudado este novo tema, das funções vetoriais de várias variáveis, você estará alcançando um certo grau de emancipação matemática. Do ponto de vista do Cálculo, você terá atingido a maior generalização possível: estudar funções do tipo

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Veja, no quadro a seguir, como essas funções, que estudaremos agora, englobam as situações estudadas anteriormente.

$n$	$m$	Tipos de Funções
1	1	Funções reais de uma variável
1	$m > 1$	Funções vetoriais de uma variável
$n > 1$	1	Funções reais de várias variáveis

A experiência que você já acumula, do estudo dos casos anteriores, certamente será de grande valia. No entanto, a perspectiva global trará diversas novidades.

Nosso principal objetivo nesta etapa final do curso é estabelecer a noção de diferenciabilidade das funções vetoriais de várias variáveis assim como o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita, nas suas formas mais gerais.

Começaremos pelo básico.

### Algumas notações

Passaremos a estabelecer as notações, na medida em que forem necessárias, ao longo de uma série de exemplos que apresentaremos a seguir.

#### Exemplo 19.1.

Considere  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, x - 2y, xy).$$

A função  $f$  tem  $\mathbb{R}^2$  como domínio, portanto, é uma função de duas variáveis reais (independentes), denotadas por  $x$  e  $y$ , cujos valores são vetores de  $\mathbb{R}^3$ .

Por exemplo,  $f(1, -1) = (2, 3, -1)$ .

De certa forma, a função  $f$  consiste de três funções reais de duas variáveis, as chamadas *funções coordenadas*:

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

onde  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f_2(x, y) = x - 2y$  e  $f_3(x, y) = xy$ .

Você já deve saber, da Álgebra Linear, que é conveniente representar elementos do espaço  $\mathbb{R}^n$  como *vetores colunas*, usando a forma matricial  $n \times 1$ . Assim, a função  $f$  também pode ser apresentada como

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x - 2y \\ xy \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x - 2y \\ xy \end{bmatrix}.$$

Isso é particularmente útil quando estamos lidando com uma função cujas coordenadas são funções afins. Nesse caso, usamos a notação matricial com grande vantagem. Veja o exemplo a seguir.

### Exemplo 19.2.

Considere a função  $F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x + 3y - z + 4 \\ -x + y + 2z - 5 \end{bmatrix}$ , definida em todo o  $\mathbb{R}^3$ . Nesse caso, a função  $F$  tem duas funções coordenadas:

$$F_1(x, y, z) = 2x + 3y - z + 4 \quad \text{e} \quad F_2(x, y, z) = -x + y + 2z - 5.$$

Podemos usar a álgebra das matrizes para representar essa função. Veja:

$$F \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y - z \\ -x + y + 2z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Você deve ter notado que neste exemplo, ao contrário do exemplo anterior, usamos uma letra maiúscula,  $F$ , para representar a função. Esta é uma das maneiras que usamos para assinalar que estamos lidando com um objeto vetorial.

Além da notação matricial, podemos usar negrito para indicar os vetores da base. Dessa forma, em  $\mathbb{R}^2$ , vale  $\mathbf{i} = (1, 0)$  e  $\mathbf{j} = (0, 1)$  e em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . Usando essa notação, poderíamos ter escrito

$$F(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (2x + 3y - z + 4)\mathbf{i} + (-x + y + 2z - 5)\mathbf{j}$$

para descrever a lei de definição da função  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .

### Atividade 19.1.

Considere  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  matrizes de ordens  $3 \times 2$

e  $3 \times 1$ , respectivamente. Vamos denotar  $\mathbf{u} = (u, v)$  um elemento genérico

em  $\mathbb{R}^2$ . Dependendo da conveniência, você pode denotar também por  $\mathbf{u}$  a matriz  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ .

Seja  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  a função definida por

$$F(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u} + B,$$

onde o ponto indica a multiplicação de matrizes e o sinal de adição é a adição matricial. Determine  $n$  e  $m$  e reescreva a lei de definição de  $F$  usando a notação de coordenadas.

Assim, a forma geral de uma *função afim* de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$  é dada pela equação

$$F(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + B,$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes de ordens  $n \times m$  e  $m \times 1$ , e  $\mathbf{x}$  representa o vetor genérico  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . A forma matricial é conveniente, pois generaliza os casos mais simples já conhecidos, como  $f(x) = ax + b$ , uma função afim da reta.

## Domínios

Como nos casos que estudamos anteriormente, dada uma lei de definição de uma função  $f$ , de  $m$  variáveis independentes, se o domínio não for mencionado, assumimos que este é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  onde a lei faz sentido. Como lidaremos com diversas funções coordenadas, o domínio da função será a interseção dos domínios das funções coordenadas. Vamos a um exemplo.

### Exemplo 19.3.

Vamos determinar o domínio da função

$$G(x, y) = \left( \ln(1 - x^2 - y^2), \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}, 3x - 2y \right).$$

Essa é uma função de duas variáveis,  $x$  e  $y$ , tomando valores em  $\mathbb{R}^3$ . Começamos determinando os domínios das funções coordenadas. Primeiro o domínio de  $G_1(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ . Esse é o conjunto

$$\text{Dom}(G_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 - x^2 - y^2 < 0\}.$$

A sua representação geométrica está na figura a seguir.

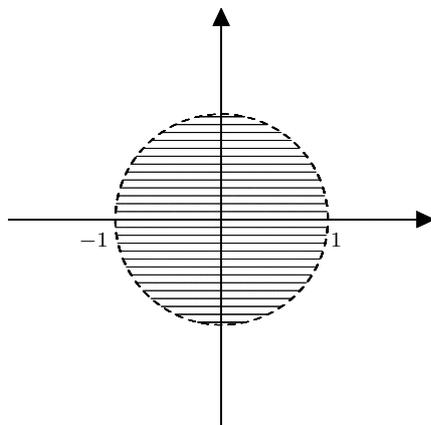


Figura 19.1  
Domínio de  $G_1$ .

Note que  $(0, 0) \in \text{Dom}(G_1)$ , a região indicada pelas hachuras. A circunferência tracejada indica que o bordo de  $\text{Dom}(G_1)$  não faz parte do conjunto.

Já o domínio de  $G_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$  é determinado pela inequação  $1 - 4x^2 > 0$ , que no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma faixa vertical. Veja a figura a seguir.

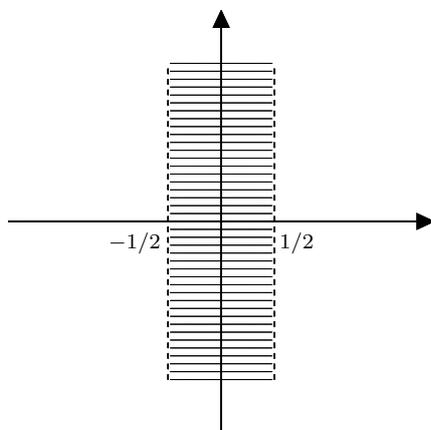


Figura 19.2  
Domínio de  $G_2$ .

Como o domínio de  $G_3$  é todo o plano  $\mathbb{R}^2$ , o domínio de  $G$  é a interseção  $\text{Dom}(G_1) \cap \text{Dom}(G_2)$ , dada por

$$\text{Dom}(G) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < 1 \text{ e } -1/2 < x < 1/2 \},$$

representada na figura a seguir.

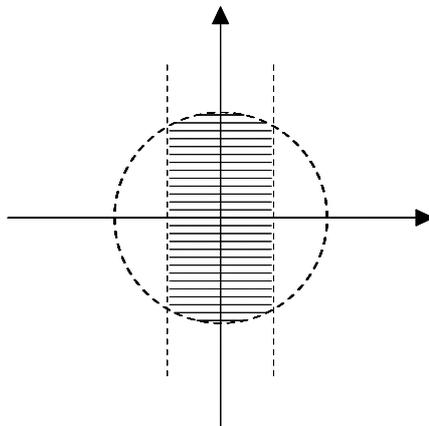


Figura 19.3  
Domínio de  $G$ .

### Atividade 19.2.

Determine o domínio da função

$$F(x, y) = (\sqrt{1 - x - y}, \sqrt{1 - x + y}, \sqrt{1 - x^2 + y})$$

e represente-o geometricamente.

As funções que estudamos até agora podiam ser interpretadas geometricamente com alguma facilidade uma vez que podíamos desenhar, com alguma fidelidade, os seus gráficos. Isso ocorre nos casos das funções reais de uma e de duas variáveis. Nos casos de funções vetoriais de várias variáveis, essa representação é apenas simbólica, uma vez que o gráfico de uma função  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Por exemplo, no caso em que  $n = m = 2$ , o gráfico está contido em  $\mathbb{R}^4$ .

No entanto, há situações que podemos interpretar geometricamente, sem lançar mão do gráfico da função. Alguns desses recursos serão apresentados a partir de agora, de maneira prática, por meio de alguns exemplos.

### Funções do plano no plano

Quando  $f(x, y)$  é uma função que toma valores em  $\mathbb{R}^2$ , você poderá usar um recurso que o ajudará a entender o que podemos chamar de geometria da função. A idéia é a seguinte: representamos dois sistemas de coordenadas, colocados um ao lado do outro. Na cópia do lado esquerdo, representamos o domínio da função, na cópia do lado direito, o contradomínio. Queremos

saber como a função *aplica* ou *transforma* subconjuntos que estão à esquerda em subconjuntos à direita. Por exemplo, quais são as imagens por  $f$  das retas verticais e horizontais? Para realizar isso, basta fazer, alternadamente, cada uma das variáveis igual a uma constante. Vamos a um exemplo.

#### Exemplo 19.4.

A função  $f(x, y) = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)$  é uma função afim cuja lei de definição pode ser escrita usando matrizes:

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

Como  $\cos(\pi/3) = 1/2$  e  $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ , sabemos que  $f$  é a composição de duas funções: uma rotação de  $60^\circ$ , no sentido anti-horário, em torno da origem e uma translação. Isso fica ilustrado pelas figuras a seguir.

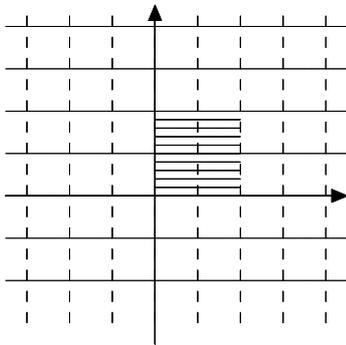


Figura 19.04

Reticulado com retas horizontais inteiras e verticais interrompidas

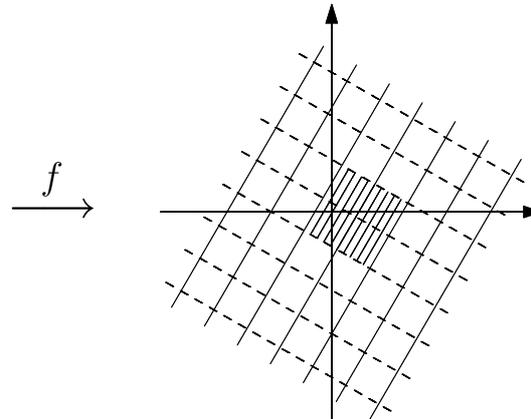


Figura 19.05

Imagem por  $f$  do reticulado à esquerda.

Você deve ter observado que retas foram transformadas em retas por  $f$ . Na verdade, isso acontece sempre nos casos das transformações afins. Além disso, o quadrado  $[0, 2] \times [0, 2]$ , representado por hachuras no plano à esquerda, é transladado e rotacionado no quadrado com hachuras à direita. Note que  $f(0, 0) = (1, -3/2)$ .

Como as rotações e translações são transformações *isométricas*, ou seja,

que preservam distâncias, o quadrado original foi movido mas permanece um quadrado.

### Atividade 19.3.

Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $f(x, y) = (x+1, x+y+1)$ . Escreva a função afim  $f$  na forma matricial e faça um esboço, nos moldes do que foi feito no exemplo 19.4, de como  $f$  transforma o retângulo de vértices  $(-1, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ .

Quais são as imagens por  $f$  das retas horizontais?

A função  $f$  é uma isometria?

Vamos, agora, considerar exemplos de funções que não são afins. Veja que a função pode transformar retas em parábolas, por exemplo.

### Exemplo 19.5.

Considere  $h(x, y) = (x + y^2/4, 2y - x^2/8)$ . Se fizermos  $y = k$ , obteremos

$$\alpha(x) = h(x, k) = (x + k^2/4, 2k - x^2/8),$$

funções cujas imagens são parábolas no plano. Analogamente, fazendo  $x = j$ , obtemos

$$\beta(y) = h(j, y) = (j + y^2/4, 2y - j^2/8).$$

Aqui estão as imagens nos casos  $k, j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , para pequenas variações de  $x$  e de  $y$ , respectivamente, em torno da origem.

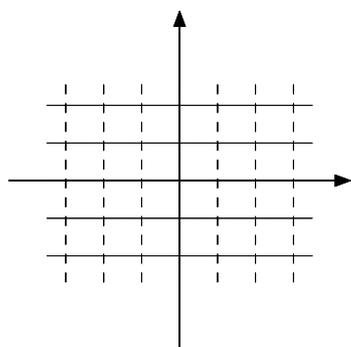


Figura 19.04

Reticulado com retas horizontais inteiras e verticais interrompidas

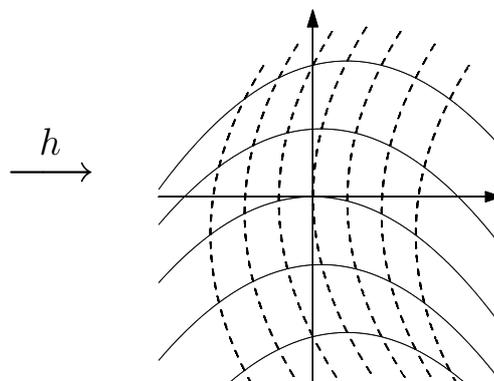


Figura 19.05

Imagem por  $h$  do reticulado à esquerda.

Além das curvaturas nas imagens, o que difere bastante entre esse exemplo e os exemplos anteriores é que  $h$  não é injetora. Veja que o esboço que você acaba de ver deixa a impressão de que  $h$  é injetora. Lembre-se, isso significa que, se  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , então  $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$ . Isso realmente ocorre numa certa vizinhança da origem. No entanto, se tomarmos a imagem de uma vizinhança maior, poderemos ver que  $h$  não é injetora. Veja o esboço da imagem por  $h$  de retas horizontais e verticais que têm interseção não vazia. Por exemplo, existem  $t$  e  $s$  tais que  $f(t, 0) = f(0, s)$ . Use uma máquina de calcular para confirmar que  $f(10.07936840, 0) \approx f(0, -6.349604208)$ .

A figura a seguir mostra que as duas curvas que são imagens dos eixos de coordenadas se intersectam na origem voltam a se intersectar em  $f(10.07936840, 0) \approx f(0, -6.349604208) \approx (10.07936840, -12.69920842)$ . Note, se a função  $f$  fosse injetora, as imagens dos eixos de coordenadas só poderiam se intersectar na imagem da origem e em mais nenhum ponto.

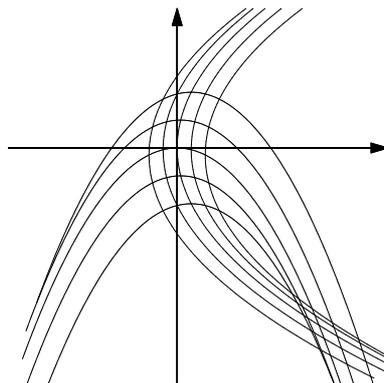


Figura 19.8

Imagens por  $f$  de retas horizontais e verticais próximas da origem.

Vamos agora considerar um exemplo muito importante. Essa função tem um papel relevante em diversas áreas da Matemática e servirá de exemplo para vários fenômenos matemáticos.

### Exemplo 19.6.

Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Essa função é proveniente da Teoria das Funções Complexas. Nesse

contexto, ela é simplesmente a função  $f(z) = e^z$ , onde  $z = x + iy$ , a variável complexa.

Estudaremos, inicialmente, o efeito desta transformação sobre as retas verticais. Para isso, fazemos  $x = \text{constante}$ . Neste caso, obtemos as seguintes equações:

$$\alpha(y) = f(a, y) = e^a (\cos y, \text{sen } y).$$

Assim, a imagem da reta vertical  $x = a$  é o círculo de centro na origem, com raio  $e^a$ .

Realmente,

$$\|f(a, y)\| = \sqrt{(e^a \cos y)^2 + (e^a \text{sen } y)^2} = \sqrt{e^{2a} (\cos^2 y + \text{sen}^2 y)} = \sqrt{e^{2a}} = e^a.$$

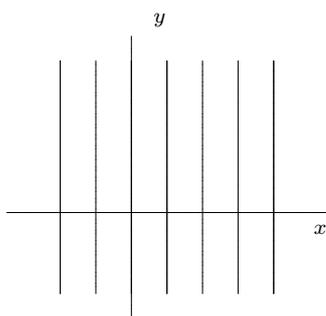


Figura 19.9

Retas verticais no domínio de  $f$ .

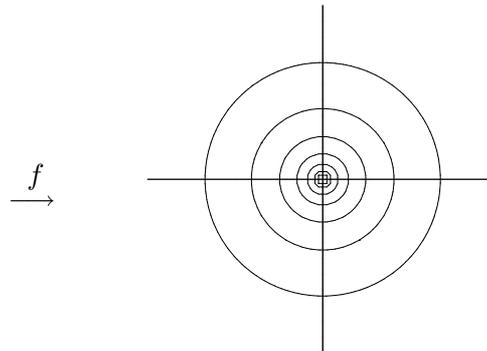


Figura 19.10

Imagens por  $f$  das retas verticais.

Antes de prosseguirmos, vamos fazer uma análise um pouco mais cuidadosa desta situação. Note que,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $e^a > 0$ . Assim, a imagem do eixo vertical ( $x = 0$ ) é o círculo de raio 1. Se tomarmos  $a < 0$ , obteremos os círculos cujos raios estão entre zero e um ( $0 < e^a < 1$ ). Se tomarmos  $a > 0$ , obteremos os círculos cujos raios são maiores do que 1 ( $e^a > 1$ ). Assim, esta transformação aplica todo o semiplano que está à esquerda do eixo vertical no interior do círculo de raio 1, com centro na origem (faz com que o gênio entre na garrafa), enquanto o semiplano que fica à direita do eixo vertical recobre toda a região do plano que é exterior ao círculo de raio 1, com centro na origem.

Note que  $(0, 0) \notin \text{Im}(f)$ , uma vez que, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\|f(x, y)\| = \sqrt{e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \text{sen}^2 y} = e^x > 0.$$

Veja, agora, o que acontece com as retas horizontais. Neste caso, devemos fixar a segunda variável ( $y = b$ ), obtendo

$$\beta(x) = f(x, b) = e^x (\cos b, \text{sen } b).$$

Note que  $f(x, b)$  é um múltiplo positivo (por  $e^x > 0$ ) do vetor unitário  $(\cos b, \text{sen } b)$ . Dessa forma, a imagem da reta  $y = b$  é um raio, com início na origem, gerado pelo vetor  $(\cos b, \text{sen } b)$ . Veja a figura a seguir.

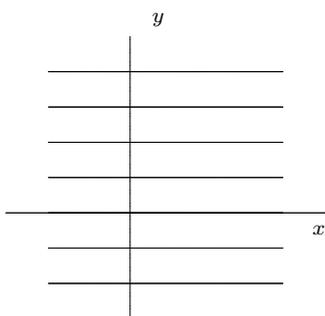


Figura 19.11

Retas horizontais no domínio de  $f$ .

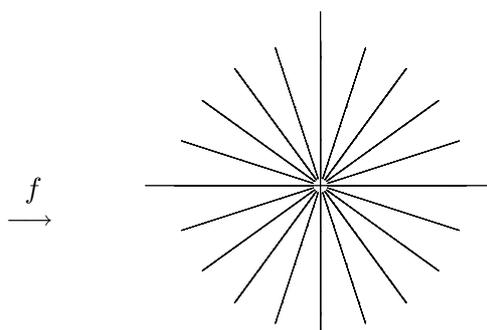


Figura 19.12

Imagens por  $f$  das retas horizontais.

Devido ao comportamento da função exponencial, toda a semi-reta  $y = b$ , com  $x < 0$ , isto é, toda a semi-reta horizontal que se encontra à esquerda do eixo vertical, é comprimida no pedaço de raio que vai da origem (sem incluí-la) até o ponto  $(\cos b, \text{sen } b)$ , de comprimento 1. Já a semi-reta  $y = b$ , com  $x > 0$ , isto é, toda a semi-reta horizontal que se encontra à direita do eixo vertical, é expandida no restante do raio, com o comprimento crescendo exponencialmente, na medida em que  $x > 0$  cresce.

Reunindo as duas informações, a imagem do reticulado cartesiano é um reticulado *polar*.

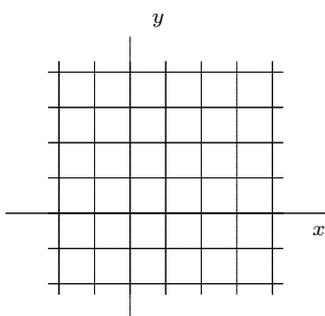


Figura 19.13

Reticulado cartesiano no domínio de  $f$ .

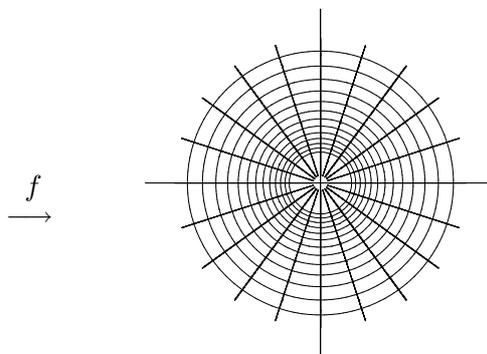


Figura 19.14

Reticulado polar na imagem de  $f$ .

Observe que esta função não é injetora, uma vez que as imagens das retas  $y = b + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , por  $f$ , são coincidentes (sobre o raio gerado pelo vetor unitário  $(\cos b, \sin b)$ ).

Concluindo, a função  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  *enrola* o plano  $\mathbb{R}^2$  sobre o plano  $\mathbb{R}^2$  menos a origem, aplicando retas verticais em círculos concêntricos na origem, retas horizontais em raios partindo da origem, sendo que todo o semiplano  $x < 0$  é aplicado no interior do disco de raio 1 com centro na origem, enquanto o plano  $x > 0$  recobre o exterior do mesmo disco. Recobre é a palavra adequada, pois a função não é injetora.

### Considerações finais

Nesta aula você aprendeu que o domínio de uma função vetorial é a interseção dos domínios das funções coordenadas. Além disso, você aprendeu a interpretar geometricamente as funções do plano no plano. Essa atividade é bastante diferente de tudo que você tem feito até agora, portanto, é natural que você experimente alguma dificuldade. Os exercícios propostos deverão ajudá-lo a progredir nesse tema. Bom trabalho!

### Exercícios

1. Determine o domínio da função  $f(x, y) = (\sqrt{8 + x^2 - y^2}, \sqrt{16 - x^2 - y^2})$  e represente-o geometricamente.
2. Determine o domínio da função  $g(x, y, z) = (\sqrt{5 - z^2}, \sqrt{4 - x^2 - y^2 + z^2})$  e represente-o geometricamente.
3. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $f(x, y) = (x + y, x - y)$ .
  - a) Represente a função  $f$  usando a álgebra das matrizes;
  - b) Esboce a imagem por  $f$  do quadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 1)$ ;
  - c) Esboce a imagem por  $f$  das retas horizontais  $y = -2$ ,  $y = -1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ , e  $y = 2$ ;
  - d) Esboce a imagem por  $f$  das retas verticais  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , e  $x = 2$ ;

Podemos dizer que  $f$  é uma isometria?

4. Seja  $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .

a) Mostre que a função  $g$  transforma o círculo de centro na origem e raio  $r$  no círculo de centro na origem e raio  $r^2$ .

(Sugestão: Tome  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , uma parametrização do círculo de centro na origem e raio  $r$ , e considere  $\beta(t) = g \circ \alpha(t)$  a composição de  $g$  com a curva  $\alpha$ . A curva traçada por  $\beta$  é a imagem por  $g$  do círculo de raio  $r$ . Lembre-se de que  $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$  e  $\sin 2t = 2 \cos t \sin t$ .)

b) Esboce a imagem por  $g$  das retas  $y = -2$ ,  $y = -1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ ,  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , e  $x = 2$ .

Note que as curvas obtidas são velhas conhecidas da Geometria Analítica.

5. Seja  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  a função apresentada no exemplo 19.6. Esboce a imagem por  $f$  dos seguintes conjuntos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 0\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \pi\};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -\pi/4 \leq y \leq \pi/4\}.$$



## Aula 20: Conjuntos de nível e mais alguns exemplos de funções vetoriais

Versão 1.0

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular conjuntos de nível de funções vetoriais de várias variáveis.
- Parametrizar superfícies simples.

### Conjuntos de nível

Você já sabe que, dada uma função  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , o conjunto de nível  $c$  de  $f$  é o subconjunto dos elementos do domínio  $A$  que são levados por  $f$  em  $c$ .

$$f^{-1}(c) = \{\mathbf{x} \in A; f(\mathbf{x}) = c\}.$$

A notação  $\mathbf{x}$ , em negrito, serve para lembrar-nos de que  $\mathbf{x}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^n$ .

Em particular, se  $n = 2$ , esses conjuntos são chamados curvas de nível e, se  $n = 3$ , são as superfícies de nível.

Nesta seção vamos considerar esse conceito para o caso das funções vetoriais de várias variáveis.

Considere  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vetorial definida no subconjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ . O conjunto

$$F^{-1}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; F(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\}$$

é chamado *conjunto de nível  $\mathbf{a}$  de  $F$* .

#### Lema

Se  $F_1, F_2, \dots, F_m : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções coordenadas da função  $F$ , então

$$F^{-1}(\mathbf{a}) = F_1^{-1}(a_1) \cap F_2^{-1}(a_2) \cap \dots \cap F_m^{-1}(a_m).$$

Em outras palavras, o conjunto de nível de  $F$  é a interseção dos correspondentes conjuntos de nível de suas funções coordenadas.

*Demonstração:*

Basta observar que a equação vetorial  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$  é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 \\ F_2(\mathbf{x}) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_2 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}) = F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_m. \end{cases}$$

A solução do sistema é a interseção das soluções de cada equação.  $\square$

Veja que o sistema  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$  tem  $n$  incógnitas (o mesmo número que a dimensão do domínio de  $F$ ) e  $m$  equações (o mesmo número que a dimensão do contradomínio de  $F$ ).

Parece complicado, mas não é nada que um exemplo não esclareça.

### Exemplo 20.1.

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função do plano no plano definida por  $F(x, y) = (x^2 + 4y^2, y - x^2)$ . Vamos determinar o conjunto de nível  $(4, -1)$  de  $F$ .

Veja, nesse caso, a função tem duas coordenadas e depende de duas variáveis,  $x$  e  $y$ , ou seja,  $n = m = 2$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$  e  $\mathbf{a} = (4, -1)$ . Queremos resolver a equação vetorial

$$F(\mathbf{x}) = F(x, y) = (4, -1)$$

equivalente ao sistema de equações (não-lineares)

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y - x^2 = -1. \end{cases}$$

Determinar os conjuntos de nível pode ser uma tarefa cheia de emoções, uma vez que os sistemas (em geral não-lineares) podem ser difíceis de resolver. De qualquer forma, não custa tentar. Neste caso, vamos adotar a seguinte estratégia: isolamos  $x^2$  na segunda equação e o substituímos na primeira, obtendo uma equação do segundo grau em  $y$ . Parece bom, não é?

$$y - x^2 = -1 \quad \iff \quad x^2 = y + 1.$$

Substituindo na primeira equação:

$$y + 1 + 4y^2 = 4 \iff 4y^2 + y - 3 = 0.$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16 \times 3}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} = -1 \text{ ou } \frac{3}{4}.$$

Se  $y = -1$ , a equação  $y = x^2 - 1$  nos diz que  $x = 0$ .

Se  $y = \frac{3}{4}$ , a equação  $y = x^2 - 1$  nos dá  $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ . Portanto,

$$F^{-1}(4, -1) = \left\{ (0, -1), \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{4}\right) \right\}.$$

Veja nas figuras a seguir a interpretação geométrica do que acabamos de determinar.

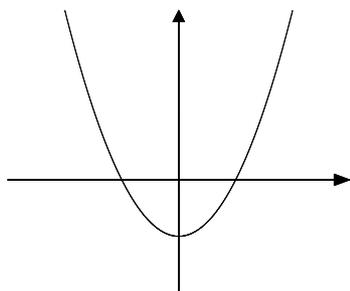


Figura 20.01

Curva de nível 4 da função  
 $F_1(x, y) = x^2 + 4y^2$ .

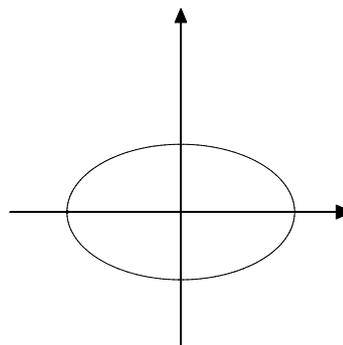


Figura 20.2

Curvas de nível -1 da função  
 $F_2(x, y) = y - x^2$ .

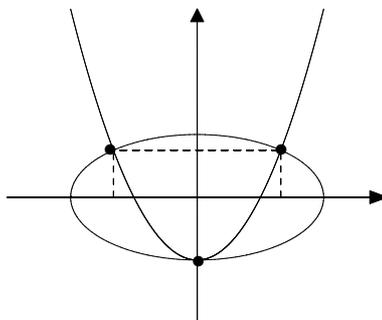


Figura 20.3

Sobreposição das duas curvas determinando os pontos  $(\pm\sqrt{7}/2, 3/4)$  e  $(0, -1)$ .

### Atividade 20.1.

Seja  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $G(x, y) = (x^2 + y^2, y - x - 1)$ . Determine o conjunto de nível  $(1, 0)$  de  $G$ .

### Exemplo 20.2.

Vamos considerar agora um caso em que o domínio da função é tridimensional. Vamos determinar o conjunto de nível  $(0, 2)$  da função  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 4z, z + x - 2)$ .

Neste caso, vamos resolver um sistema de duas equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \\ z + x - 2 = 2. \end{cases}$$

Essas equações definem uma esfera e um plano, respectivamente.

A primeira equação,  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ , pode ser reescrita como  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ , recompondo o quadrado  $(z - 2)^2 = z^2 - 4z + 4$ . Portanto, a superfície de nível 0 da primeira função coordenada de  $F$  é uma esfera de raio 2 com centro no ponto  $(0, 0, 2)$ , que é tangente ao plano  $xy$ , de equação  $z = 0$ .

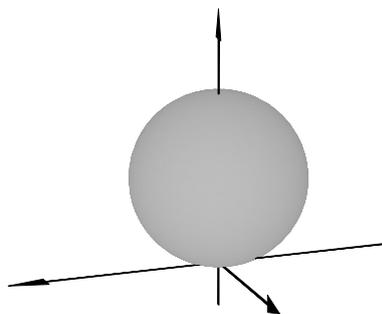


Figura 20.4

Superfície de nível 0 da função  
 $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$ .

A equação  $x + z = 4$  não impõe qualquer restrição à variável  $y$ . Isso significa que ela define um plano paralelo ao eixo  $Oy$ , que é a superfície de nível 2 da segunda função coordenada de  $F$ .

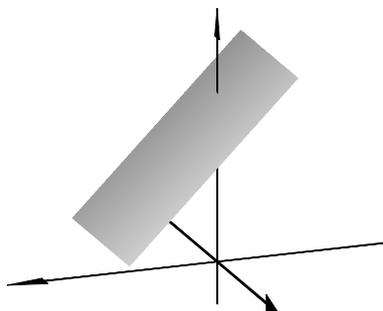


Figura 20.5

Superfície de nível 2 da função

$$F_2(x, y, z) = z + x - 2.$$

O conjunto de nível  $(0, 2)$  da função  $F$  é a interseção da esfera com o plano. Nesse caso, esse conjunto é uma curva fechada em  $\mathbb{R}^3$ .

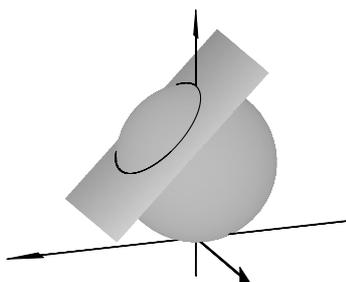


Figura 20.06

Superfícies de nível das  
funções coordenadas.

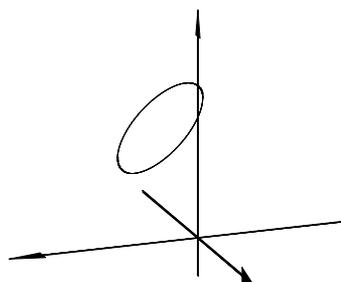


Figura 20.07

Conjunto de nível  $(0, 2)$  da função  $F$ .

Uma maneira de descrever analiticamente este conjunto é encontrando uma de suas parametrizações. Isso, para quem não tem prática, pode ser um pouco difícil. No entanto, não custa tentar, você não acha? Vejamos.

A estratégia é muito parecida com a que usamos no exemplo anterior, para resolver o sistema de equações. Vamos nos livrar de uma das variáveis. Veja: usando a segunda equação, obtemos

$$z = 4 - x.$$

Substituindo na primeira equação, temos

$$x^2 + y^2 + (4 - x)^2 - 4(4 - x) = 0,$$

que é equivalente a  $2x^2 - 4x + y^2 = 0$ .

Recompondo o quadrado, obtemos

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Essa equação define, no plano  $z = 0$ , uma elipse. A interpretação geométrica é a seguinte: essa elipse é a projeção no plano  $xy$  da curva localizada no espaço.

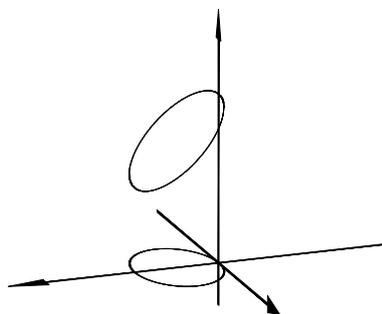


Figura 20.8  
Conjunto de nível de  $F$  e  
sua projeção no plano  $xy$ .

Uma outra maneira de interpretar esse procedimento é a seguinte: a equação  $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  define, em  $\mathbb{R}^3$ , um cilindro elíptico, paralelo ao eixo  $Oz$ , que contém o conjunto de nível da função  $F$ . Assim, a interseção desse cilindro com o plano  $z = 0$  é a elipse plana da figura anterior.

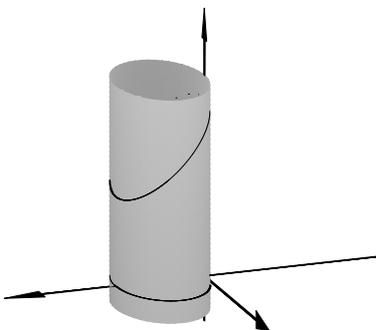


Figura 20.9  
Cilindro definido pela  
equação  $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ .

Iniciaremos o processo de parametrização pela elipse do plano  $z = 0$ , definida por

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1.$$

O truque consiste em lembrar que  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ . Veja, basta fazer os ajustes necessários:

$$\begin{cases} x - 1 &= \cos t \\ y &= \sqrt{2} \sin t. \end{cases}$$

Realmente,

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = \cos^2 t + \frac{(\sqrt{2} \sin t)^2}{2} = 1.$$

Assim, a função vetorial

$$\beta(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t, 0)$$

parametriza a elipse. Para obtermos uma parametrização da curva de cima, que é o que queremos, precisamos descrever o *movimento* na coordenada  $z$  em função do parâmetro  $t$ . Ora, a equação

$$z = 4 - x$$

nos diz que devemos colocar  $z = 4 - 1 - \cos t$ .

Assim, a função vetorial

$$\alpha(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t, 3 - \cos t)$$

é uma parametrização do conjunto de nível  $(0, 2)$  da função  $F$ , nesse caso, uma curva fechada.

Com o sucesso desse exemplo em mente, não deixe de tentar você mesmo encontrar uma dessas parametrizações. Aqui está uma boa oportunidade.

### Atividade 20.2.

Considere  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, z - 2x + 1).$$

Descreva o conjunto de nível  $(0, 1)$  de  $G$ , esboçando as superfícies de nível das correspondentes funções coordenadas. Encontre uma parametrização para  $G^{-1}(0, 1)$  nos moldes do que foi feito no Exemplo 20.2.

Muito bem! É hora de tratar de outro tema!

## Funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ – superfícies novamente

Assim como as imagens das funções vetoriais de uma variável são curvas (no plano ou no espaço tridimensional, dependendo do caso), as imagens de funções de subconjuntos do plano  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  são, em geral, superfícies.

Essa é uma outra forma de descrever superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Lembre-se: anteriormente descrevemos certas superfícies em  $\mathbb{R}^3$  como gráficos de funções de subconjuntos do plano  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  e como conjuntos de nível de funções de subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$ .

### Exemplo 20.3.

O parabolóide definido pela equação

$$z = x^2 + y^2 + 2$$

pode ser descrito *explicitamente* como o gráfico da função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 + 2, \end{aligned}$$

*implicitamente* como a superfície de nível 0 da função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 - z + 2 \end{aligned}$$

e *parametricamente* como a imagem da função vetorial

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2 + y^2 + 2). \end{aligned}$$

É verdade que esse exemplo parece um pouco artificial, mas você precisa se acostumar com esta nova maneira de expressar as superfícies, de maneira gradual. O próximo exemplo deverá trazer um pouco mais de novidade.

### Exemplo 20.4.

Considere  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

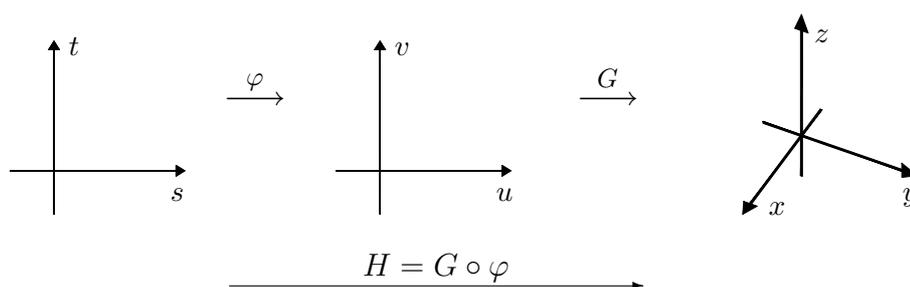
$$G(u, v) = (u + v, u - v + 2, u^2 + 2u - v^2 + 2v).$$

Queremos descobrir como é a imagem de  $G$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Antes de prosseguirmos, uma palavra sobre a escolha dos nomes das variáveis independentes  $u$  e  $v$ . Assim como em todas as outras profissões, os matemáticos têm certos costumes e usos. Assim como preferimos a letra  $t$  para representar o parâmetro de uma curva, como em  $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t)$ , é comum usar variáveis  $u$  e  $v$  nas parametrizações de superfícies. Vai bem com  $t, u, v, \dots$

Este caso apresenta maior dificuldade do que a situação apresentada no exemplo anterior, no qual as duas primeiras funções coordenadas definiam, simplesmente, a inclusão de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ , coordenada a coordenada. Agora, as duas primeiras funções *embaralham*, pelo menos um pouco, as variáveis  $u$  e  $v$ . Sem problemas! Vamos usar a estratégia de reordenar as coordenadas. Antes de qualquer ação, vamos revisar o plano geral.

Pretendemos *trocar* as variáveis  $u$  e  $v$  por novas variáveis, que por falta de mais imaginação chamaremos  $s$  e  $t$ , de tal forma que a função  $G$  fique mais parecida da função do exemplo anterior. Em termos mais técnicos, queremos construir uma função  $(u, v) = \varphi(s, t)$ , de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , tal que a composição  $H(s, t) = G(\varphi(s, t)) = G(u(s, t), v(s, t))$  seja do tipo  $(s, t, g(s, t))$ .



Esquema da composição das funções  $G$  e  $\varphi$ .

Acreditem, isso é menos complicado do que parece. Veja, uma vez estabelecida a estratégia, basta seguir a pista. Queremos

$$\begin{cases} u + v & = & s \\ u - v + 2 & = & t. \end{cases}$$

Portanto, vamos resolver o sistema. Somando as duas equações, obtemos

$$2u + 2 = s + t.$$

Portanto,

$$u = \frac{s+t}{2} - 1.$$

Agora, usando a equação  $u + v = s$ , obtemos  $v = s - u$  e

$$v = \frac{s-t}{2} + 1.$$

Assim, obtivemos a fórmula que define a função (mudança de coordenadas)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$(u(s, t), v(s, t)) = \varphi(s, t) = \left( \frac{s+t}{2} - 1, \frac{s-t}{2} + 1 \right).$$

Agora, fazemos a composição  $H = G \circ \varphi$ , lembrando que

$$G(u, v) = (u + v, u - v + 2, u^2 + 2u - v^2 + 2v).$$

$$\begin{aligned} H(s, t) &= G(u(s, t), v(s, t)) = G\left(\frac{s+t}{2} - 1, \frac{s-t}{2} + 1\right) \\ &= \left( \frac{s+t}{2} - 1 + \frac{s-t}{2} + 1, \frac{s+t}{2} - 1 - \frac{s-t}{2} + 1, \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{s+t}{2} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{s+t}{2} - 1\right) - \left(\frac{s-t}{2} + 1\right)^2 + 2\left(\frac{s-t}{2} + 1\right) \right) = \\ &= (s, t, st). \end{aligned}$$

Para comprovar a igualdade na última coordenada, você precisará de uma folha de rascunho. Agora, podemos *ver* a imagem da função  $G$  em  $\mathbb{R}^3$ , que é a mesma imagem da função  $H$ , que é um hiperbolóide (uma sela).

Observe que  $G(-1, 1) = (0, 0, 0)$ . Na figura a seguir você poderá ver a imagem por  $G$  do quadrado  $[-3, 1]$ ,  $[-1, 3]$ , cujo centro é o ponto  $(-1, 1)$ , aplicado por  $G$  na origem de  $\mathbb{R}^3$ .

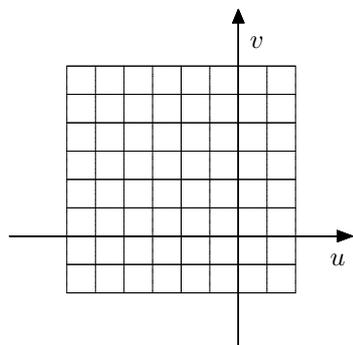


Figura 20.10

Reticulado com retas horizontais e verticais com centro em  $(-1, 1)$

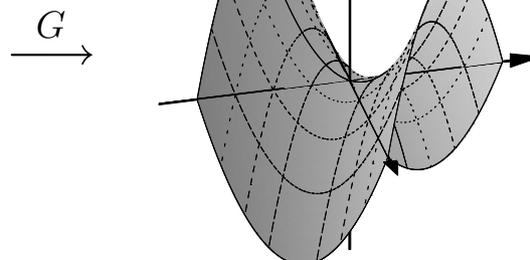


Figura 20.11

Imagem por  $G$  do reticulado à esquerda.

Veja, ainda, que a imagem das retas horizontais, definidas por  $v = \text{constante}$ , são as parábolas cujas concavidades são voltadas para cima, enquanto a imagem das retas verticais, definidas por  $u = \text{constante}$ , são parábolas cujas concavidades são voltadas para baixo.

Veja mais um exemplo.

### Exemplo 20.5.

Vamos descobrir qual é a imagem do retângulo  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq \pi \text{ e } 0 \leq v \leq 2\pi\}$  pela função

$$E(u, v) = (\text{sen } v \cos u, \text{sen } v \text{ sen } u, \cos v).$$

A profusão de senos e cossenos nessa fórmula pode deixá-lo um pouco apreensivo. No entanto, vamos abordá-la com calma.

Note que a terceira coordenada não depende de  $u$ . Isso quer dizer que, se fixarmos  $v$ , igualando a alguma constante, e fizermos  $u$  variar, obteremos uma curva plana paralela ao plano  $xy$ , pois a variável  $u$  aparece nas duas primeiras coordenadas.

Vamos levar essa idéia um pouco mais adiante. Ainda com  $v$  fixo, as duas primeiras coordenadas definem uma curva do tipo  $k \cos u$ , na primeira coordenada, e  $k \text{ sen } u$ , na segunda coordenada, onde  $k$  é  $\text{sen } v$ . Dessa forma, a imagem das retas horizontais são círculos de raio  $\text{sen } v$  e com centro em  $(0, 0, \cos v)$ .

Isso também nos diz que a imagem de  $E$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície de revolução em torno do eixo  $Oz$ . Portanto, para descobriremos que superfície é essa, basta que façamos um corte num semiplano que contenha o eixo  $Ox$ . Veja, se fizermos  $u = \pi/2$ , por exemplo, teremos  $\sin u = 1$  e  $\cos u = 0$ , e a curva obtida, em função de  $v$ , será dada pela equação

$$\alpha(v) = E(\pi/2, v) = (0, \sin v, \cos v).$$

Quando  $v$  varia de 0 até  $\pi$ , essa curva traça um semicírculo no semiplano  $yz$ , com  $y \geq 0$ , com extremidades nos pontos  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ .

Ora, isso quer dizer que a imagem do retângulo  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  é a esfera de centro na origem e raio 1.

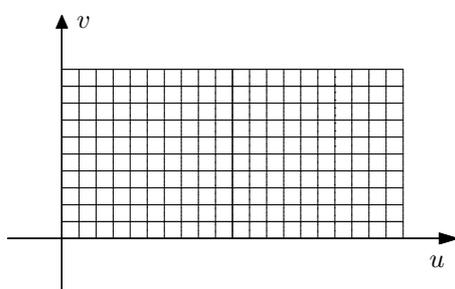


Figura 20.12

Reticulado com retas horizontais e verticais, de largura  $2\pi$  e altura  $\pi$ .

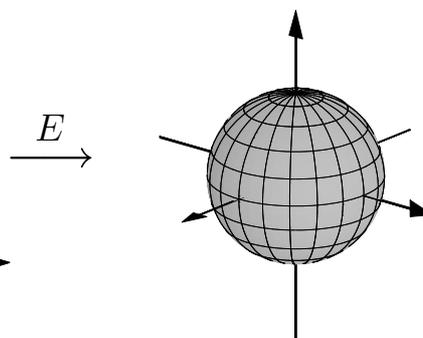


Figura 20.13

Imagem por  $E$  do reticulado à esquerda.

Os segmentos de retas horizontais, de comprimento  $2\pi$ , são levados por  $E$  nos *paralelos* e os segmentos de retas verticais são levados por  $E$  nos *meridianos*, semicírculos que ligam o ponto  $(0, 0, 1)$  (Pólo Norte) ao ponto  $(0, 0, -1)$  (Pólo Sul).

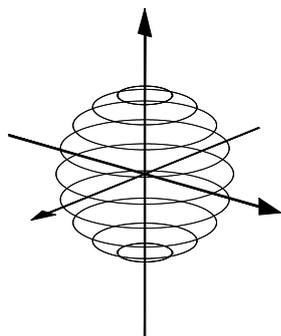


Figura 20.14

Imagens por  $E$  das retas horizontais.

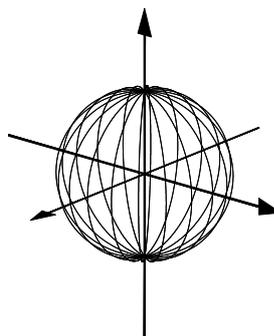


Figura 20.15

Imagens por  $E$  das retas verticais.

## Comentários finais

Nesta aula, você aprendeu mais coisas do que pode parecer, a princípio. A leitura cuidadosa desses exemplos, especialmente daqueles que tratam de parametrização de superfícies, renderam bons frutos num futuro breve. Não deixe de ler, também, as soluções das atividades propostas ao longo da aula, apresentadas logo a seguir, nem deixe de trabalhar com os Exercícios Propostos (EPs).

## Soluções das atividades propostas

### Atividade 20.1.

Seja  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $G(x, y) = (x^2 + y^2, y - x - 1)$ . Determine o conjunto de nível  $(1, 0)$  de  $G$ .

#### Solução:

Nesse caso, temos de resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ y - x - 1 &= 0. \end{cases}$$

Isolando  $y$  na segunda equação e substituindo na primeira, obtemos a equação

$$x^2 + x = 0,$$

que tem raízes  $x = 0$  e  $x = 1$ . Essas soluções correspondem aos pontos  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ , que formam o conjunto de nível  $(1, 0)$  da função  $G$ .

$$G^{-1}(1, 0) = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Geometricamente, esses dois pontos são comuns à reta  $y = x + 1$  e ao círculo definido por  $x^2 + y^2 = 1$ , de raio 1 e centro na origem.

### Atividade 20.2.

Considere  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, z - 2x + 1).$$

Descreva o conjunto de nível  $(0, 1)$  de  $G$ , esboçando as superfícies de nível das correspondentes funções coordenadas. Encontre uma parametrização para  $G^{-1}(0, 1)$  nos moldes do que foi feito no Exemplo 20.2.

### Solução:

Neste caso, temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ z - 2x + 1 = 1, \end{cases}$$

de duas equações e três incógnitas. A primeira equação,  $z = x^2 + y^2$ , define um parabolóide de revolução, que é a superfície de nível 0 da primeira função coordenada. A superfície de nível 1 da segunda função coordenada é um plano. Portanto, o conjunto de nível que procuramos é a interseção dessas duas superfícies.

Vamos determinar uma parametrização dessa curva. Começamos eliminando a variável  $z$ , que significa, geometricamente, projetar a curva no plano  $z = 0$ , por exemplo.

A primeira equação nos dá  $z = 2x$ . Substituindo na segunda equação, resulta  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ . Reacomodando o quadrado  $x^2 - 2x$ , obtemos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

um círculo de centro na  $(1, 0, 0)$ , de raio 1, contido no plano  $z = 0$ . Podemos parametrizá-lo com a função

$$\beta(t) = (1 + \cos t, \sin t, 0).$$

Para determinarmos a curva que procuramos, basta obter a parametrização de  $z$ , usando a equação  $z = 2x$ . Assim, uma parametrização do conjunto  $G^{-1}(0, 1)$  é dada por

$$\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2 \cos t).$$

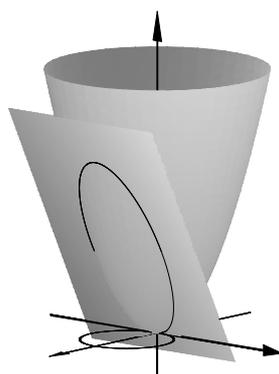


Figura 20.9

Conjunto de nível  $(0, 1)$  da função

$$G(x, y) = (x^2 + y^2 - z, z - 2x + 1).$$

A imagem da curva  $\alpha$  é a interseção do parabolóide com o plano, que se projeta no plano  $z = 0$  na imagem da curva  $\beta$ , o círculo de centro em  $(1, 0, 0)$  e raio 1, tangente ao eixo  $Oy$ .

## Exercícios

**1.** Determine o conjunto de nível indicado para cada uma das funções a seguir.

a)  $f(x, y) = (y - x^2, y - x), \quad (-4, 2);$

b)  $g(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y), \quad (1, 1);$

c)  $h(x, y) = (x(x + y), xy - 1), \quad (5, 0).$

**2.** Determine o conjunto de nível indicado para cada uma das funções a seguir. Se o conjunto for uma curva ou um conjunto de curvas, determine correspondentes parametrizações.

$$\text{a) } F(x, y, z) = (x + y - z, x - y + 3z), \quad (2, -2);$$

$$\text{b) } g(x, y, Z) = (x^2 + 2y^2 - 2z^2, y), \quad (2, 1);$$

$$\text{c) } H(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, z^2), \quad (1, 3);$$

$$\text{d) } I(x, y, z) = (x - y, x^2 + y^2 + z^2), \quad (0, 2);$$

$$\text{e) } J(x, y, z) = (x^2 + z^2, x + z + 2y), \quad (1, 2);$$

$$\text{f) } K(x, y, z) = (x^2 + y^2, z^2, x - y), \quad (1, 4, 0).$$

**3.** Considere  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ .

a) Mostre que a imagem de  $\varphi$  está contida no cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

b) Faça um esboço da imagem por  $\varphi$  do conjunto

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq \pi, -2 \leq v \leq 2\}.$$

**4.** Considere  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por  $\psi(u, v) = ((v^2 + 1) \cos u, (v^2 + 1) \sin u, v)$ .

a) Determine as imagens por  $\psi$  das retas  $v = -2, -1, 0, 1, 2$ .

b) Determine a imagem por  $\psi$  das retas  $u = 0$  e  $u = \pi/2$ .

c) Faça um esboço da imagem de  $\psi$ .

**5.** Determine a imagem pela função  $F(u, v) = (u + v, u - v, 4u + 2v)$  do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  e faça um esboço desse conjunto.

**6.** Considere a função definida por  $G(u, v) = (u, 2u^2 + uv + v^2, u + v)$ . Determine a imagem por  $G$  do quadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

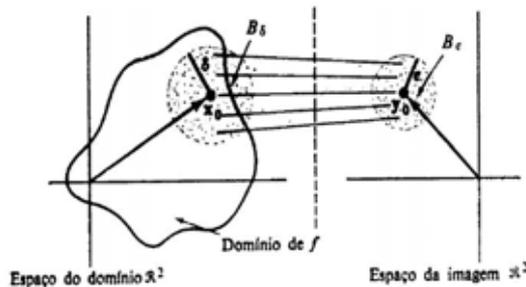
## Aula 21 – Limites e Continuidade

### Introdução

Limites e continuidade foram introduzidas para funções reais  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nas aulas 3 e 4. Nesta aula estudaremos as definições destes conceitos para funções vetoriais reais  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $m \geq 2$ .

### Definição 1

Considere  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$  um ponto de acumulação de  $U$ . Dizemos então que  $y_0 = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  é o limite de  $f$  em  $x_0$  se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que  $\|f(x) - y_0\| < \varepsilon$  sempre que  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ . Neste caso denotamos  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .



caso  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Observe que a definição de limite para funções vetoriais é, em essência, a mesma que fizemos para as funções reais, o que difere são as dimensões dos contra-domínios e suas respectivas normas. A expressão  $\|f(x) - y_0\|$  representa a distância entre dois vetores do  $\mathbb{R}^m$ , isto é,

$$\|f(x) - y_0\| = \sqrt{(f_1(x) - y_1)^2 + \dots + (f_m(x) - y_m)^2},$$

em que  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  são as funções coordenadas de  $f$ .

Note ainda que a distância

$$\begin{aligned} \|f(x) - y_0\| &= \sqrt{(f_1(x) - y_1)^2 + \dots + (f_m(x) - y_m)^2} \\ &\geq \sqrt{(f_i(x) - y_i)^2} \\ &= |f_i(x) - y_i| \end{aligned} \tag{1}$$

Cálculo III

com  $i = 1, \dots, m$ , e que

$$\|f(x) - y_0\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} \{|f_i(x) - y_i|\} \quad (2)$$

Usando a desigualdade (1) podemos concluir que se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - y_0\| = 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f_i(x) - y_i| = 0$  para cada função coordenada  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; isto é, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Por outro lado, usando a desigualdade (2), podemos concluir que se  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f_i(x) - y_i| = 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ , então  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - y_0\| = 0$ . Isto posto, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 1**

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com funções coordenadas  $f_1, \dots, f_m$ ,  $x_0$  um ponto de acumulação de  $U$  e  $y_0 = (y_1, \dots, y_m)$  em  $\mathbb{R}^m$ . Então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = y_i$$

com  $i = 1, \dots, m$ .

**Exemplo 1**

Seja  $f(x, y) = (y + \operatorname{tg} x, x \ln y)$ . Note que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y + \operatorname{tg} x = 1$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f_2(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x \ln y = 0.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f_1(x, y), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f_2(x, y) \right) = (1, 0).$$

**Exemplo 2**

Seja  $f(x, y, t) = (xy, \operatorname{sen} \frac{1}{t})$ . Como

$$\lim_{(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)} \operatorname{sen} \frac{1}{t}$$

não existe, temos que

$$\lim_{(x,y,t) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, t)$$

também não existe.

## Continuidade

### Definição 2

Considere  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $x_0 \in U$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

### Obs 1

Em um ponto isolado (ponto que não é ponto de acumulação) do domínio de  $f$ , não podemos falar de limite. Neste caso diremos que  $f$  é automaticamente contínua em tal ponto, por definição.

### Obs 2

Dizemos que uma função é contínua se ela é contínua em todo ponto do seu domínio.

Como conseqüência da definição 2 e do teorema 1 podemos enunciar o seguinte teorema:

### Teorema 2

Uma função vetorial é contínua se, e somente se, as suas funções coordenadas são contínuas.

### Exemplo 3

Como  $f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$ , com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $j = 1, \dots, n$ , é uma função contínua em  $\mathbb{R}^n$ , para  $i = 1, \dots, m$ , temos que a transformação linear  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ .

### Exemplo 4

A função  $f(x, y) = \left( \frac{\text{sen } xy}{e^{x+y}}, \frac{\text{cos } xy}{e^{x+y}} \right)$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$  pois cada função coordenada é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . De fato,  $f_1(x, y) = \frac{\text{sen } xy}{e^{x+y}}$  e  $f_2(x, y) = \frac{\text{cos } xy}{e^{x+y}}$  são contínuas, pois são definidas como quocientes de funções contínuas e  $e^{x+y} > 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Com relação a noção de continuidade podemos enunciar ainda os seguintes resultados:

**Teorema 3**

Considere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  contínuas de tal modo que  $g \circ f$  esteja definida. Então  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4**

Considere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  contínua e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então:

- a)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  é contínua;
- b)  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$  é contínua.

As demonstrações dos teoremas 3 e 4 podem ser observadas num texto de Cálculo Avançado, por exemplo, Williamson et al., (1976) e Apostol. Deixamos ao leitor curioso a tarefa de consultá-las. Em verdade, o que nos interessa, num primeiro curso de Cálculo, é que vocês saibam interpretar e usar estes resultados. Vamos aos exercícios!

**Exercícios Propostos**

1. Em que pontos as seguintes funções não têm limites?

a)  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + \operatorname{tg} x \\ \ln(x + y) \end{pmatrix}$       c)  $f(x, y) = \frac{x}{\operatorname{sen} x} + y$

b)  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{x^2 + 1} \\ \frac{x}{y^2 - 1} \end{bmatrix}$       d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x} + y & \text{se } x \neq 0 \\ 2 + y & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2. Em que pontos as seguintes funções não são contínuas?

a)  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$       c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x} + y & \text{se } x \neq 0 \\ 1 + y & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b)  $f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3u - 4v \\ u + 8v \end{bmatrix}$

## Aula 22 – Derivadas Parciais - Diferencial - Matriz Jacobiana

### Introdução

Uma das técnicas do cálculo tem como base a idéia de aproximação de uma função por uma função linear ou por uma função afim na vizinhança de um ponto do seu domínio. Foi assim para função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Cálculo I),  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Cálculo II) e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (início do Cálculo III). E para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a história, como veremos, irá se repetir.

### Definição 3

Dizemos que uma função  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é afim se existe uma função (ou transformação) linear  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e um vetor  $y_0$  em  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$A(x) = L(x) + y_0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Conforme já observamos, veremos que as funções afins constituem a base do Cálculo Diferencial das funções vetoriais.

### Exemplo 5

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= (2x + y - 1, x - 2z + 1, x + y + z) \\ &= (2x + y, x - 2z, x + y + z) + (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

é uma função afim de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que  $y_0 = (-1, 1, 0)$  e  $L$  é a transformação linear representada na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = L(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

## Cálculo III

Obs 3

Note que poderíamos ter apresentado a função afim do exemplo anterior usando também a representação matricial

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A(x, y, z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L(x,y,z)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y_0}$$

Exemplo 6

Em dimensão 1, uma função afim tem a forma  $f(x) = ax + b$ , em que a parte linear é  $L(x) = ax$ , sendo  $[a]_{1 \times 1}$  a matriz que representa a função linear.

## Em Busca do Conceito de Diferenciabilidade

Recordamos inicialmente o caso das funções reais  $f$  de uma variável real  $x$ . Ora, sabemos que se  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , então  $f$  pode ser aproximada numa vizinhança de  $x_0$  por uma função afim  $A(x) = ax + b$ . Como  $f(x_0) = A(x_0) = ax_0 + b$ , obtemos:

$$A(x) = ax + b = a(x - x_0) + f(x_0).$$

A parte linear de  $A(x)$  (representada anteriormente por  $L$ ) é, neste caso, a expressão  $a \cdot x$ . A norma euclideana de um número real é o seu valor absoluto, assim a condição de diferenciabilidade torna-se

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - A(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} \quad (3)$$

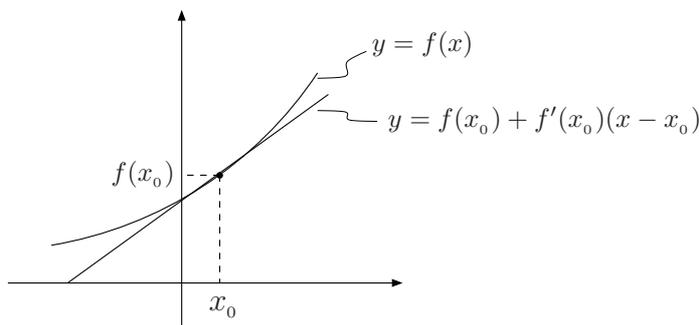
onde  $E(x)$  é o erro que se comete quando aproximamos  $f(x)$  por  $A(x)$  numa vizinhança de  $x_0$ . Como sabemos, a expressão (3) é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$$

O número real  $a$  é usualmente denotado por  $f'(x_0)$  e é denominado **derivada de  $f$  em  $x_0$** . A função afim  $A$  é portanto dada por

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e o seu gráfico é a **reta tangente** ao gráfico de  $f$  em  $x_0$  (veja figura a seguir).



Agora estudaremos a possibilidade de aproximar uma função vetorial real arbitrária  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  numa vizinhança de um ponto  $x_0$  do seu domínio por uma função afim  $A(x)$ .

Ora, para início de conversa, devemos ter  $A(x_0) = f(x_0)$ , isto é, para  $x = x_0$ ,  $A(x)$  deve fornecer o valor exato de  $f$  (acompanhe a discussão atual comparando com o exemplo das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Como  $A(x) = L(x) + y_0$  e  $f(x_0) = A(x_0) = L(x_0) + y_0$ , temos que

$$A(x) = L(x) + y_0 = L(x) + f(x_0) - L(x_0).$$

Ora,  $L(x)$  é linear, logo

$$L(x) - L(x_0) = L(x - x_0)$$

e, portanto, concluímos que

$$A(x) = L(x - x_0) + f(x_0) \quad (4)$$

É natural impormos também a condição de que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A(x)) = 0 \quad (5)$$

afinal queremos que  $A(x)$  seja uma aproximação para a função  $f$  numa vizinhança de  $x_0$ .

Entretanto, para que isso aconteça, precisamos que  $f$  seja contínua em  $x = x_0$ . Com efeito, observe inicialmente que como  $L(x)$  é contínua, temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} L(x - x_0) = L(0) = 0$$

logo,

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)),$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ora, isto é significativo, mas nada diz a respeito de  $L$ . Portanto, a fim de que o nosso conceito de aproximação possa distinguir uma função afim de outra ou medir de algum modo até que ponto  $A$  é uma boa aproximação para  $f$ , algum requisito é necessário. No caso de dimensão 1 (função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ ), exigimos que  $[f(x) - A(x)]$  tendesse a zero mais rápido do que  $x$  tendesse a  $x_0$ , isto é, exigimos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

(denotamos, neste caso,  $a$  por  $f'(x_0)$  - veja equação (3) da página anterior).

É natural que façamos o mesmo (é claro, com algumas adaptações) para funções de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Assim, exigiremos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Equivalentemente, podemos exigir que  $f$  seja representável na forma

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \|x - x_0\|E(x - x_0),$$

em que  $E(x - x_0)$  é uma função que tende a zero quando  $x \rightarrow x_0$ .

Isto posto, podemos fazer a seguinte definição

#### Definição 4

Uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  será denominada *diferenciável em  $x_0$*  se:

- (i)  $x_0$  é um ponto interior de  $U$
- (ii) Existe uma função afim que aproxima  $f$  numa vizinhança de  $x_0$ , isto é, existe uma função linear  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

A função linear  $L$  é denominada *diferencial de  $f$  em  $x_0$* . Dizemos simplesmente que a função  $f$  é *diferenciável* se ela for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Conforme a definição, o domínio de uma função diferenciável é um conjunto aberto. Entretanto, é conveniente estender a definição de modo tal que se possa falar de uma função diferenciável  $f$  definida num subconjunto arbitrário  $S$  do espaço do domínio. Diremos, neste caso, que  $f$  é diferenciável em  $S$  se existir  $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável num conjunto aberto  $U$  que contém  $S$  de modo que  $\tilde{f} \Big|_S = f$ .

## Como Determinar a Diferencial de uma Dada Função

Da Álgebra Linear sabemos que uma transformação linear  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  pode ser representada por uma matriz  $m \times n$ . Assim, o que precisamos fazer é determinar os coeficientes  $(a_{ij})$  dessa matriz. Veremos a seguir que estes coeficientes podem ser determinados em termos das derivadas parciais de  $f$ .

Ora, como  $L$  é univocamente determinada por  $f$  em cada ponto interior do domínio de  $f$ , podemos falar de a *diferencial* de  $f$  em  $x_0$  e a denotamos por  $d_{x_0}f$ . Assim, para encontrar a matriz  $[d_{x_0}f]$  de  $f$  uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , consideramos a base canônica  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  do espaço domínio  $\mathbb{R}^n$ . Se  $x_0$  é um ponto interior do domínio de  $f$ , os vetores

$$x_j = x_0 + te_j, \quad j = 1, \dots, n$$

estão todos no domínio de  $f$  para  $t$  suficientemente pequeno. Temos ainda pela condição (ii) da definição de diferencial que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - d_{x_0}f(x - x_0)}{t} = 0 \quad (6)$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Como  $d_{x_0}f$  é linear, temos que

$$d_{x_0}f(x_j - x_0) = d_{x_0}f(te_j) = td_{x_0}f(e_j).$$

Logo, o limite (6) é equivalente a dizer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_j) - f(x_0)}{t} - d_{x_0}f(e_j) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_j) - f(x_0)}{t} = d_{x_0}f(e_j), \quad (7)$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Ora,  $d_{x_0}f(e_j)$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz de  $d_{x_0}f$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \mathbf{a}_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \mathbf{a}_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1j} \\ \mathbf{a}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{nj} \end{bmatrix}$$

$d_{x_0}f \qquad e_j$

Por outro lado, o vetor  $x_j$  difere de  $x_0$  apenas na  $j$ -ésima coordenada, e nesta coordenada a diferença é justamente o número  $t$ . Portanto, o primeiro membro da equação (7) é precisamente a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

## Cálculo III

De fato, se  $f_1, f_2, \dots, f_m$  são as funções coordenadas de  $f$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_j) - f(x_0)}{t} \right) &= \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + te_j) - f_1(x_0)}{t}, \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_m(x_0 + te_j) - f_m(x_0)}{t} \right) \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0). \end{aligned}$$

Isto posto, temos que:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ a_{2j} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x_0) \\ &\vdots \\ a_{mj} &= \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{aligned}$$

com  $j = 1, \dots, n$ .

Assim, temos que a matriz de  $d_{x_0}f$  tem a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Esta matriz é denominada *matriz jacobiana* ou *derivada* de  $f$  em  $x_0$  e é denotada por  $f'(x_0)$ . Podemos resumir o resultado que acabamos de provar no seguinte teorema:

## Teorema 5

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função diferenciável e  $x_0$  um ponto interior de  $f$ . Então a diferencial  $d_{x_0}f$  é univocamente determinada e a sua matriz é a matriz jacobiana de  $f$ , isto é, para todos os vetores  $y \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$d_{x_0}f(y) = f'(x_0) \cdot y \quad (8)$$

Apesar da transformação linear  $d_{x_0}f$  e a sua matriz  $f'(x_0)$  serem logicamente distintas, a equação (8) mostra que elas podem ser identificadas na prática contanto que seja entendido que a matriz de  $d_{x_0}f$  seja tomada em relação as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ .

#### Exemplo 7

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y, z) = (x^2 + e^y, x + y \operatorname{sen} z)$ . Ora, as funções coordenadas de  $f$  são  $f_1(x, y, z) = x^2 + e^y$ ,  $f_2(x, y, z) = x + y \operatorname{sen} z$  e a matriz jacobiana em  $(x, y, z)$  é dada então por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & \operatorname{sen} z & y \cos z \end{bmatrix}$$

Portanto, o diferencial de  $f$  em  $(1, 0, \pi/2)$  é a função linear cuja matriz é

$$f'(1, 0, \pi/2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### Exemplo 8

A função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y) = ((x + y)^2, xy^2 + x^2y)$  tem diferencial  $d_{x_0}f$  em  $(x, y)$  representada pela matriz jacobiana

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 2y & 2x + 2y \\ y^2 + 2xy & x^2 + 2xy \end{bmatrix}$$

## Condição Suficiente para a Diferenciabilidade

Dada uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável,  $U$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ , vimos que  $d_{x_0}f$ ,  $x_0 \in U$  fica univocamente determinada a partir dos cálculos das derivadas parciais

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0),$$

com  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , se utilizarmos as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , isto é, se  $f$  é diferenciável em  $x_0 \in U$ , então  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ , com  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , existem e

$$[d_{x_0}f] = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right]_{m \times n}.$$

## Cálculo III

Diante disto, surge uma questão natural: será que se todas as derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$  existem? podemos afirmar que  $f$  é diferenciável em  $x_0$ ? Sabemos (por aulas anteriores) que tal fato não se verifica para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . No entanto, podemos adicionar alguma condição sobre as derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  de modo a garantir a diferenciabilidade de  $f$ . Acreditamos que você já deva saber do que se trata (veja o próximo teorema).

## Teorema 6

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Se todas as derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  das funções coordenadas são contínuas em  $U$ , então  $f$  é diferenciável em  $U$ .

Não faremos aqui a demonstração deste teorema. O leitor curioso pode encontrar uma demonstração deste resultado em [Williamson et al., 1976, pp 261-263]. O que realmente interessa para nós é se você sabe usar este resultado para argumentar sobre a diferenciabilidade de funções vetoriais. Vejamos alguns exemplos.

## Exemplo 9

Considere  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  definida no disco aberto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Note que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

são contínuas no disco aberto. Logo,  $f$  é diferenciável em  $D$ .

## Exercícios Propostos

1. Se  $f$  é função vetorial definida por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Determine a derivada de  $f$  nos seguintes casos:

- a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:

a)  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$  em  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)  $g(x, y, z) = xyz$  em  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$

c)  $f(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cos } t \end{pmatrix}$  em  $t = \pi/4$

d)  $f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$  em  $t = 1$

e)  $g(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$  em  $(x, y) = (1, 2)$

f)  $A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u + v \\ u - v \\ 1 \end{bmatrix}$  em  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g)  $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos v \\ u \text{sen } v \\ v \end{bmatrix}$  em  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$

h)  $f(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + xz, xyz)$  em  $(x, y, z)$

3. Seja  $P$  uma função do espaço euclidiano tridimensional no bidimensional definida por  $P(x, y, z) = (x, y)$ .

- Qual é a interpretação geométrica desta transformação?
- Mostre que  $P$  é diferenciável em todos os pontos e determine a matriz da diferencial de  $P$  em  $(1, 1, 1)$ .

4. a) Desenhe a curva em  $\mathbb{R}^2$  definida parametricamente pela função

$$g(t) = (t - 1, t^2 - 3t + 2), \quad -\infty < t < +\infty.$$

b) Determine a função afim que aproxima  $g$

(1) numa vizinhança de  $t = 0$

(2) numa vizinhança de  $t = 2$

c) Descreva a curva definida parametricamente pela função afim.

## Cálculo III

5. a) Esboce a superfície em  $\mathbb{R}^3$  definida explicitamente pela função

$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$$

- b) Determine a função afim que aproxima  $f$

(1) numa vizinhança de  $(0, 0)$

(2) numa vizinhança de  $(2, 0)$

- c) Desenhe os gráficos das funções afins em (b).

6. Qual é a derivada da função afim

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} ?$$

7. Prove que toda função linear é a sua própria diferencial.

8. Prove que toda translação é diferenciável. Qual é a diferencial?

9. A função  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$  é diferenciável em todo ponto de seu domínio?

10. Verifique que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se } x \neq \pm y \\ 0 & \text{se } x = \pm y \end{cases}$$

tem a matriz jacobiana em  $(0, 0)$ , mas que não é diferenciável aí.

## Aula 23 – Regra da Cadeia

Uma das fórmulas mais úteis de Cálculo de uma variável é a regra da cadeia, utilizada para calcular a derivada da composta de uma função com outra:

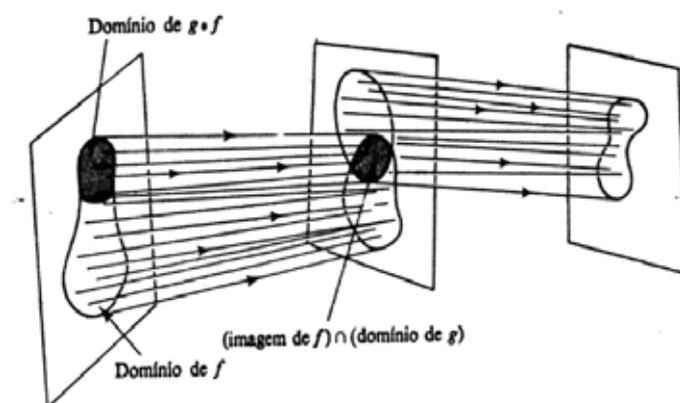
$$[g(f(x))]’ = g’(f(x))f’(x).$$

A generalização para várias variáveis é igualmente valiosa e, devidamente formulada, é igualmente fácil de enunciar.

Se duas funções  $f$  e  $g$  estão relacionadas de tal modo que o espaço imagem de  $f$  é o mesmo que o espaço domínio de  $g$ , podemos formar a **função composta**  $g \circ f$  aplicando primeiro  $f$  e depois  $g$ . Assim,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

para todo vetor  $x$  tal que  $x$  esteja no domínio de  $f$  e  $f(x)$  esteja no domínio de  $g$ . O domínio de  $g \circ f$  consiste dos vetores  $x$  que são levados por  $f$  no domínio de  $g$ . Uma configuração abstrata da composta de duas funções está ilustrada na figura a seguir.



### Exemplo 10

Suponhamos que seja dada uma região bidimensional na qual os pontos se movem subordinados a uma lei especificada. Suponhamos que, para uma dada posição inicial com coordenadas  $(u, v)$ , depois de um determinado tempo, o ponto esteja numa posição  $(x, y)$ . Então  $(x, y)$  e  $(u, v)$  podem

ser relacionados por equações da forma

$$\begin{aligned}x &= g_1(u, v) \\ y &= g_2(u, v).\end{aligned}$$

Na notação vetorial estas equações podem ser escritas

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{u}),$$

em que  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)$  e  $g$  têm funções coordenadas  $g_1, g_2$ . Suponhamos agora que a posição inicial  $\mathbf{u} = (u, v)$  de um ponto é determinada por uma função de outras variáveis  $(s, t)$  pelas equações

$$\begin{aligned}u &= f_1(s, t) \\ v &= f_2(s, t).\end{aligned}$$

Estas podem ser escritas na forma vetorial assim

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{s}),$$

em que  $\mathbf{s} = (s, t)$  e  $f$  têm funções coordenadas  $f_1, f_2$ . Então  $(x, y)$  e  $(s, t)$  estão relacionadas por

$$\begin{aligned}x &= g_1(f_1(s, t), f_2(s, t)) \\ y &= g_2(f_1(s, t), f_2(s, t)),\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{x} = g(f(\mathbf{s})).$$

Usando a notação  $g \circ f$  para a composta de  $g$  e  $f$ , podemos também escrever

$$\mathbf{x} = g \circ f(\mathbf{s}).$$

Para determinar a derivada  $g \circ f$  em termos das derivadas de  $g$  e  $f$ , suponhamos que  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $x_0$  e que  $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$  é diferenciável em  $y_0 = f(x_0)$ . Então  $g'(y_0)$  é uma matriz  $p \times m$  e  $f'(x_0)$  é uma matriz  $m \times n$ . Segue-se que, o produto  $g'(y_0)f'(x_0)$  está definido e é uma matriz  $p \times n$ . A regra da cadeia diz que esta matriz produto é a derivada de  $g \circ f$  em  $x_0$ . Como a multiplicação matricial corresponde a composição de funções lineares, o resultado pode ser enunciado em termos de diferenciais: *a diferencial de uma composta é uma composta de diferenciais.*

## Exemplo 11

Consideremos o caso particular em que  $f$  é uma função de uma única variável real ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) e  $g$  é real ( $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ). Então  $g \circ f$  é uma função real de uma variável real. Já sabemos que se  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis então

$$(g \circ f)'(t) = \nabla g(f(t)) \cdot f'(t) \quad (9)$$

isto é, em termos de funções coordenadas,

$$(g \circ f)'(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(t)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(t)) \right) \cdot (f'_1(t), \dots, f'_m(t)).$$

O segundo membro desta última equação pode ser escrito como um produto matricial em termos das matrizes derivadas

$$g'(f(t)) = \left( \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(t)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(t)) \right),$$

e

$$\begin{bmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_m(t) \end{bmatrix}$$

como  $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$ . O produto de  $g'(f(t))$  e  $f'(t)$  é definido pela multiplicação matricial, neste caso  $1 \times m$  vezes  $m \times 1$ , e é equivalente ao produto escalar das duas matrizes encaradas como vetores de  $\mathbb{R}^m$ . Assim, para o caso em que o domínio de  $f$  e a imagem de  $g$  são ambos unidimensionais, as fórmulas

$$\nabla g(f(t)) \cdot f'(t) \quad \text{e} \quad g'(f(t))f'(t)$$

são praticamente as mesmas.

O teorema seguinte dá uma extensão para qualquer dimensão do domínio e da imagem de  $g$  e  $f$ .

## Teorema 7 (A Regra da Cadeia)

Seja  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$  continuamente diferenciáveis em  $x$ , e seja  $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$  continuamente diferenciáveis em  $f(x)$ . Se  $g \circ f$  está definida num conjunto aberto que contém  $x$ , então  $g \circ f$  é continuamente diferenciável em  $x$  e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

*Demonstração:* Precisamos mostrar apenas que a matriz derivada de  $g \circ f$  em  $x_0$  tem elementos contínuos dados pelos elementos do produto de  $g'(f(x))$

por  $f'(x)$ . Estas matrizes têm a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(x)) \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(f(x)) \end{bmatrix}$$

O produto das matrizes tem para seu elemento de ordem  $i$  a soma dos produtos

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \quad (10)$$

Mas esta expressão é justamente o produto escalar dos dois vetores  $\nabla g_i(f(x))$  e  $\partial f / \partial x_j(x)$ . Segue-se de (9) que

$$\nabla g_i(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(x), \quad (11)$$

porque estamos derivando em relação a única variável  $x_j$ . Mas isto estabelece a relação matricial, porque os elementos  $(g \circ f)'(x)$  são por definição dados pelo segundo membro da equação (11). Como  $g$  e  $f$  são continuamente diferenciáveis a equação (10) representa uma função contínua de  $x$  para cada  $i$  e  $j$ . Portanto,  $g \circ f$  é continuamente diferenciável. ■

### Exemplo 12

Seja  $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$  e seja  $g(u, v) = (uv, u + v)$ . Encontramos

$$g'(u, v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Para calcular  $(g \circ f)'(2, 1)$ , notamos que  $f(2, 1) = (5, 3)$  e calculamos

$$g'(5, 3) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } f'(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Então o produto destas duas últimas matrizes dá

$$(g \circ f)'(2, 1) = \begin{pmatrix} 32 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

É muito comum no Cálculo denotar uma função pelo mesmo símbolo que o elemento típico da sua imagem. Assim, a derivada de uma função  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  é denotada com frequência em conjunção, com a equação  $y = f(x)$ , por  $dy/dx$ . Analogamente, as derivadas parciais de uma função  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  são comumente escritas como

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

em conjunção com a elucidativa equação  $w = f(x, y, z)$ . Por exemplo, se  $w = xy^2e^{x+3z}$ , então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^2e^{x+3z} + xy^2e^{x+3z};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2xye^{x+3z};$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 3xy^2e^{x+3z}.$$

Esta notação tem a desvantagem de não conter referência específica à função que está sendo derivada. Por outro lado, ela é conveniente no que diz respeito a notação e é, além do mais, a linguagem tradicional do Cálculo. Para ilustrar a sua conveniência, suponhamos que as funções  $g$  e  $f$  são dadas por

$$w = g(x, y, z), \quad x = f_1(s, t), \quad y = f_2(s, t), \quad z = f_3(s, t).$$

Então, pela regra da cadeia,

$$\left( \frac{\partial w}{\partial s} \quad \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

A multiplicação matricial produz

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Obtém-se uma aplicação da regra da cadeia ligeiramente diferente quando o espaço domínio de  $f$  é unidimensional, isto é, quando  $f$  é uma função de uma variável. Consideremos, por exemplo,

$$w = g(u, v), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

## Cálculo III

A composta  $g \circ f$  é, neste caso, uma função real de uma variável. A sua diferencial é definida pela matriz  $1 \times 1$  cujo elemento é a derivada

$$\frac{d(g \circ f)}{dt} = \frac{dw}{dt}.$$

As derivadas de  $g$  e  $f$  são definidas, respectivamente, pelas matrizes jacobianas

$$\left( \frac{\partial w}{\partial u} \quad \frac{\partial w}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a regra da cadeia implica que

$$\frac{dw}{dt} = \left( \frac{\partial w}{\partial u} \quad \frac{\partial w}{\partial v} \right) \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad (13)$$

Finalmente, suponhamos que  $f$  e  $g$  são ambas funções reais de uma variável. Esta é a situação encontrada no Cálculo de uma variável. As derivadas de  $f$  em  $t$ , de  $g$  em  $s = f(t)$ , e de  $g \circ f$  em  $t$  são representadas pelas três matrizes jacobianas  $1 \times 1$ ,  $f'(t)$ ,  $g'(s)$  e  $(g \circ f)'(t)$ , respectivamente. A regra da cadeia implica que

$$(g \circ f)'(t) = g'(s)f'(t) \quad (14)$$

Se as funções são apresentadas na forma

$$z = g(s) \quad s = f(t),$$

a fórmula (14) mais explícita pode ser escrita como a famosa equação

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (15)$$

## Exemplo 13

Sendo dados

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = e^{uv} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u = t + 1 \\ v = e^t \end{cases},$$

calcular  $dx/dt$  em  $t = 0$ .

*Solução:*

Sejam  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$  as funções definidas por

$$f(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ e^{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -\infty < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \end{cases}$$

A diferencial de  $f$  em  $t$  é definida pela matriz jacobiana  $2 \times 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

A matriz da diferencial de  $g$  em  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ ve^{uv} & ue^{uv} \end{pmatrix}.$$

A dependência de  $x$  e  $y$  em relação a  $t$  é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (g \circ f)(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Portanto, as duas derivadas  $dx/dt$  e  $dy/dt$  são os elementos da matriz jacobiana que define a diferencial da função composta  $g \circ f$ . A regra da cadeia implica então que

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} = 2u + 2ve^t \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} = ve^{uv} + ue^{uv+t} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Se  $t = 0$ , então

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e obtemos  $u = v = 1$ . Segue-se que

$$\frac{dx}{dt}(0) = 2 + 3 = 5$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = e + e = 2e$$

A definição de multiplicação matricial dá as fórmulas das derivadas que resultam das aplicações da regra da cadeia, um modelo formal que é fácil de memorizar. O modelo está particularmente em evidência, quando as funções coordenadas são denotadas por variáveis reais como nas equações (12), (13), (14) e (15). Todas as fórmulas da forma geral

$$\cdots + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \cdots$$

têm a desvantagem, entretanto, de não conterem referências explícitas aos pontos nos quais as várias derivadas são calculadas. É essencial, evidentemente, conhecer esta informação. Ela pode ser encontrada pela fórmula

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Segue-se que as derivadas que aparecem na matriz  $f'(x)$  são calculadas em  $x$  e as da matriz  $g'(f(x))$  são calculadas em  $f(x)$ . Esta é a razão para fazer  $t = 0$  e  $u = v = 1$  na equação (16) para obter as respostas no exemplo 4.

#### Exemplo 14

Sejam

$$z = xy \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}.$$

Suponhamos que, quando  $u = 1$  e  $v = 2$ , temos

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 3, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 5, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Suponhamos também que  $f(1, 2) = 2$  e  $g(1, 2) = -2$ . Qual é o valor de  $\partial z / \partial u(1, 2)$ ? A regra da cadeia implica que

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (17)$$

Quando  $u = 1$  e  $v = 2$ , temos  $x = f(1, 2) = 2$  e  $y = g(1, 2) = -2$ . Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, -2) = y \Big|_{x=2, y=-2} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2, -2) = x \Big|_{x=2, y=-2} = 2.$$

Para obter  $\partial z/\partial u$  em  $(u, v) = (1, 2)$ , é necessário saber em que pontos calcular as derivadas parciais que aparecem na equação (17). Com maiores detalhes, a regra da cadeia implica que

$$\frac{\partial z}{\partial u}(1, 2) = \frac{\partial z}{\partial x}(2, -2) \frac{\partial x}{\partial u}(1, 2) + \frac{\partial z}{\partial y}(2, -2) \frac{\partial y}{\partial u}(1, 2).$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial u}(1, 2) = (-2)(-1) + (2)(5) = 12.$$

### Exemplo 15

Se  $w = f(ax^2 + bxy + y^2)$  e  $y = x^2 + x + 1$ , calcular  $dw/dx(-1)$ .

*Solução:*

A solução se baseia nas fórmulas que resultam da regra da cadeia (tais como (12), (13), (14), (16)). Façamos

$$z = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Então,  $w = f(z)$  e

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Portanto,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dz} \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = f'(z)(2ax + by + (bx + 2cy)(2x + 1)).$$

Se  $x = -1$ , então  $y = 1$ , e assim  $z = a - b + c$ . Portanto,

$$\frac{dw}{dx}(-1) = f'(a - b + c)(-2a + 2b - 2c).$$

A matriz jacobiana ou derivada de uma função  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma matriz quadrada e, assim, tem determinante. Este determinante,  $\det f'(x)$ , é uma função real de  $x$  denominado determinante jacobiano de  $f$ ; ele desempenha um papel particularmente importante no teorema da mudança de variável para integrais (estudaremos isso na disciplina Cálculo IV). Nesse ponto observemos um simples corolário da regra da cadeia e da regra do produto de determinantes:

## Cálculo III

## Teorema 8

Se  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $x_0$  e  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $y_0 = f(x_0)$ , então o determinante de  $g \circ f$  em  $x_0$  é o produto do determinante jacobiano de  $f$  em  $x_0$  pelo determinante jacobiano de  $g$  em  $y_0$ .

Se  $f$  é definida por

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

então o determinante jacobiano  $\det f'$  é denotado com frequência por

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)},$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

## Exemplo 16

Seja

$$f \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

Então,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} = r.$$

O determinante jacobiano da função composta  $g \circ f$  é denotado, neste caso, por  $\partial(w, z)/\partial(r, \theta)$ .

Se

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos \theta_0 \\ r_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix},$$

o teorema (8) implica que

$$\frac{\partial(w, z)}{\partial(r, \theta)}(r_0, \theta_0) = \frac{\partial(w, z)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}(r_0, \theta_0) = 4(x_0^2, y_0^2)r_0 = 4r_0^2.$$

## Exercícios Propostos

1. Sendo dadas

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy + 1 \\ y^2 + 2 \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u + v \\ 2u \\ v^2 \end{bmatrix},$$

calcule a matriz diferencial da função composta  $g \circ f$  em  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2. Seja

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ t + 1 \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z^2 \\ x^2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

- Calcule a matriz jacobiana de  $g \circ f$  em  $t = a$ .
- Calcule  $du/dt$  em termos das derivadas de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , e as derivadas parciais de  $u$ .

3. Consideremos a curva definida parametricamente por

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 - 4 \\ e^{t-2} \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Seja  $g$  uma função real diferenciável com domínio  $\mathbb{R}^3$ . Se

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = 4, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) = 2, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x_0) = 2,$$

calcule  $d(g \circ f)/dt$  em  $t = 2$ .

4. Consideremos as funções

$$f \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + v \\ v - v \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = w.$$

- a) Calcule a matriz que define a diferencial de  $F \circ f$  em  $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .
- b) Calcule  $\partial w / \partial u$  e  $\partial w / \partial v$ .

5. Seja  $u = f(x, y)$ . Faça a mudança de variáveis  $z = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Sendo dados

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + 2xy - y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z^2 - 2xy + 2,$$

calcule  $\partial f / \partial \theta$ , quando  $r = 2$  e  $\theta = \pi/2$ .

6. Se  $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{bmatrix},$$

calcule  $\partial w / \partial r$  e  $\partial w / \partial \theta$  usando a regra da cadeia. Confirme o resultado pela substituição direta.

7. A convenção que consiste em denotar as funções coordenadas por variáveis reais tem suas ciladas. Resolva o seguinte paradoxo: Sejam  $w = f(x, y, z)$  e  $z = g(x, y)$ . Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

As quantidades  $x$  e  $y$  não estão relacionadas, de modo que  $\partial y / \partial x = 0$ . Evidentemente,  $\partial x / \partial x = 1$ . Portanto,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

e assim

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Em particular, tomemos  $w = 2x + y + 3z$  e  $z = 5x + 18$ . Então

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 5.$$

Segue-se que  $0 = 15$  o que é evidentemente falso.

8. Se  $y = f(x - at) + g(x + at)$  em que  $a$  é constante,  $f$  e  $g$  são duas vezes diferenciáveis, mostre que

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (\text{Equação da onda})$$

9. Se  $z = f(x, y)$  é diferenciável e

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix},$$

mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

10. Se  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  para algum inteiro  $n$ , e para todos os  $x, y$  e  $t$ , mostre que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y).$$

11. Consideremos uma função real  $f(x, y)$  tal que

$$f_x(2, 1) = 3, \quad f_y(2, 1) = -2, \quad f_{xx}(2, 1) = 0, \quad f_{xy}(2, 1) = f_{yx}(2, 1) = 1, \quad f_{yy}(2, 1) = 2.$$

Seja  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$  definida por

$$g(u, v) = (u + v, uv).$$

Calcule  $\partial^2(f \circ g)/\partial v \partial u$  em  $(1, 1)$ .

12. Calcule os determinantes jacobianos das seguintes funções nos pontos indicados:

a)  $f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + 2uv + 3v \\ u - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , em  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

b)  $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ w \end{pmatrix}$ , em  $x_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

c)  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , em um  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  arbitrário.

## Cálculo III

d) Uma transformação  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$ ,  $A(x) = L(x) + y_0$ , em um  $x_0$  arbitrário.

$$e) T \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \operatorname{sen} \phi \\ r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix} \text{ em } \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}.$$

**13.** Usando as funções  $f$  e  $g$  dos exercícios 12(a) 12(b), calcule o determinante jacobiano da função composta  $g \circ f$  em  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

## Aula 24 – Funções Definidas Implicitamente

### Introdução

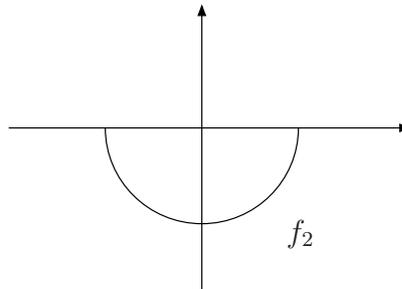
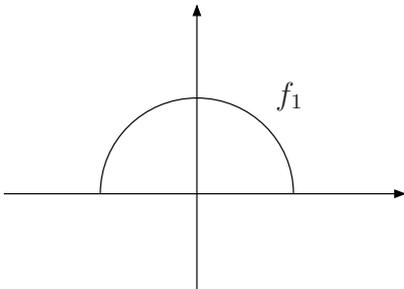
Na primeira parte do curso de Cálculo III estudamos funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definidas implicitamente por uma equação do tipo  $F(X, Y) = 0$ , em que  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Damos ênfase no nosso estudo para os casos em que  $n = 1$  e  $n = 2$ . Vamos recordar um exemplo:

#### Exemplo 17

Seja  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Então a condição de que  $F(x, f(x)) = x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$ , para todo  $x$  do domínio de  $f$ , é satisfeita para cada uma das seguintes escolhas para  $f$ :

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$



Assim, pode-se dizer que tanto  $f_1$  quanto  $f_2$  são definidas implicitamente pela equação  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Consideremos agora uma função  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Um elemento arbitrário de  $\mathbb{R}^{n+m}$  pode ser escrito como  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  ou um par  $(x, y)$  em que  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Deste modo  $F$  pode ser imaginado como uma função de duas variáveis vetoriais  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^m$  ou então como uma função da única variável vetorial  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . A função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é **definida implicitamente pela equação**  $F(x, y) = 0$  se  $F(x, f(x)) = 0$  para todo  $x$  do domínio de  $f$ .

Cálculo III

Exemplo 18

As equações

$$x + y + z - 1 = 0 \tag{18}$$

$$2x + z + 2 = 0 \tag{19}$$

determinam  $y$  e  $z$  como funções de  $x$ . De fato, “resolvendo o sistema” obtemos

$$y = x + 3 \quad \text{e} \quad z = -2x - 2.$$

Em termos de uma função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , as equações (18) e (19) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F\left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x + y + z - 1 \\ 2x + z + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A função definida implicitamente  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é

$$f(x) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3 \\ -2x - 2 \end{pmatrix}.$$

Em aulas passadas (para ser mais preciso, na aula 12), estudamos as condições para a existência de uma função  $f$  diferenciável definida implicitamente por uma equação  $F(x, f(x)) = 0$  (veja o Teorema da Função Implícita na página 7 da aula 12) para o caso em que  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2$ .

Consideremos o caso  $n = 1$ , isto é, suponha  $F(x, y)$  uma função de classe  $C^1$  definida em um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  de tal modo que  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ , sendo  $(a, b) \in U$ . Pelo Teorema da Função Implícita sabemos que existe uma função diferenciável  $f : I_a \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que

$$F(x, f(x)) = 0$$

para todo  $x \in I_a$  (intervalo aberto que contém  $a$ ).

Aplicando a regra da cadeia na equação acima, obtemos a derivada de  $f$

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

se  $F_y(x, f(x)) \neq 0$ .

Para funções vetoriais um cálculo semelhante é possível.

### Exemplo 19

Dadas as equações

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \quad xyz + 2 = 0, \quad (20)$$

suponhamos que  $x$  e  $y$  sejam funções diferenciáveis de  $z$ , isto é, a função definida implicitamente pelas equações (20) é da forma  $(x, y) = f(z)$ . Para calcular  $dx/dz$  e  $dy/dz$  aplicamos a regra da cadeia às equações dadas, para obter

$$\begin{aligned} 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z &= 0, \\ yz \frac{dx}{dz} + xz \frac{dy}{dz} + xy &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior em  $dx/dz$  e  $dy/dz$ , encontramos

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x(y^2 - z^2)}{z(x^2 - y^2)} \\ \frac{y(z^2 - x^2)}{z(x^2 - y^2)} \end{bmatrix}$$

que é a matriz  $f'(z)$ . Observe que, para que a fórmula fique completamente determinada é necessário conhecer os valores correspondentes para  $x$  e  $y$ . Entretanto, dado o ponto  $(x, y, z) = (1, -2, 1)$ , podemos determinar  $f'(1)$ .

$$f'(1) = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dz}(1, -2, 1) \\ \frac{dy}{dz}(1, -2, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e afirmar que  $f$  é univocamente determinada na vizinhança do ponto dado.

### Exemplo 20

Consideremos

$$\begin{aligned} xu + yv + zw &= 1, \\ x + y + z + u + v + w &= 0, \\ xy + zuv + w &= 1. \end{aligned}$$

Suponhamos que cada um dos  $x$ ,  $y$  e  $z$  seja uma função de  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Para calcular as derivadas de  $x$ ,  $y$  e  $z$  em relação à  $w$ , derivamos as três equações

usando a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial x}{\partial w} + v \frac{\partial y}{\partial w} + w \frac{\partial z}{\partial w} + z &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial w} + 1 &= 0, \\ y \frac{\partial x}{\partial w} + x \frac{\partial y}{\partial w} + uv \frac{\partial z}{\partial w} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Então, resolvendo o sistema encontramos  $\partial x/\partial w$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{uv^2 + xz + w - zuv - xw - v}{u^2v + vy + wx - yw - ux - uv^2}.$$

analogamente, poderíamos calcular  $\partial y/\partial w$  e  $\partial z/\partial w$ . Para calcular as parciais em relação a  $u$ , derivamos as equações originais em relação a  $u$  e calculamos  $\partial x/\partial u$ ,  $\partial y/\partial u$  e  $\partial z/\partial u$ , no sistema. As parciais em relação a  $v$  são encontradas pelo mesmo método.

O cálculo indicado no Exemplo 20 nos leva aos nove elementos da matriz da diferencial de uma função vetorial definida implicitamente. Para que o cálculo funcione, é necessário ter o número de equações dadas igual ao número de funções coordenadas definidas implicitamente. Para se perceber a razão para esta exigência, suponhamos que seja dada uma função vetorial diferenciável

$$F(u, v, x, y) = \begin{pmatrix} F_1(u, v, x, y) \\ F_2(u, v, x, y) \end{pmatrix}$$

e que as equações

$$F_1(u, v, x, y) = 0, \quad F_2(u, v, x, y) = 0 \tag{21}$$

definam implicitamente uma função diferenciável  $(x, y) = f(u, v)$ . Derivando as equações (21) em relação a  $u$  e  $v$  por meio da regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

A última matriz da direita é a matriz da diferencial de  $f$  em  $(u, v)$ . Calculando-a, obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

Para conseguirmos uma solução única, isto é, para que a matriz  $f'(u, v)$ , solução da equação (22), exista e seja única, é essencial que a matriz inversa que aparece na equação (23) exista. Isto implica, em particular, que o número de equações originalmente dadas seja igual ao número de variáveis determinadas implicitamente ou equivalentemente, que os espaços imagens de  $F$  e  $f$  devem ter a mesma dimensão.

A análoga da equação (23) vale para um número arbitrário de funções coordenadas  $F_i$  e é provada exatamente do mesmo modo. Podemos resumir o resultado no seguinte teorema:

**Teorema 9**

Se  $\mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$  são diferenciáveis, e se  $y=f(x)$  satisfaz  $F(x, y) = 0$ , então

$$f'(x, y) = -[F_Y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F_X(x, f(x))],$$

contando que  $F_Y$  tenha uma inversa. A derivada  $F_Y$  é calculada mantendo-se  $x$  fixo, e  $F_X$  é calculada mantendo-se  $y$  fixo.

A notação utilizada acima é ilustrada no próximo exemplo.

**Exemplo 21**

Suponhamos que

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y + xz \\ xz + yz \end{pmatrix}$$

e que escolhemos  $x=x$ ,  $y=(y, z)$ . Então,

$$F_x(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$F_{(y,z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 & x \\ z & x + y \end{pmatrix}.$$

Exemplo 22

Suponhamos dada

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y + z \\ x + y^2z \end{pmatrix}$$

e calculemos  $[F_{(y,z)}(1, y, z)]^{-1}$ . A matriz derivada de  $F$  em relação a  $(y, z)$  é

$$F_{(y,z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2yz & y^2 \end{pmatrix},$$

e assim

$$F_{(y,z)}(1, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & x + y \end{pmatrix}.$$

Calculando a matriz inversa pela fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

obtemos

$$[F_{(y,z)}(1, y, z)]^{-1} = \frac{1}{y^2 - 2yz} \begin{pmatrix} y^2 & -1 \\ -2yz & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios Propostos

1. Se

$$x^2y + yz = 0 \quad \text{e} \quad xyz + 1 = 0$$

calcule  $dx/dz$  e  $dy/dz$  em  $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ .

2. Se o exercício anterior for expresso na notação vetorial geral do Teorema 9, o que são  $F$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $F_Y$  e  $F_X$ ?

3. Se

$$\begin{aligned} x + y - u - v &= 0, \\ x - y + 2u + v &= 0, \end{aligned}$$

calcule  $\partial x/\partial u$  e  $\partial y/\partial u$ :

- a) calculando  $x$  e  $y$  em termos de  $u$  e  $v$ ;
- b) derivando implicitamente

4. Se o item 3 for expresso na notação vetorial do Teorema 9, que é a matriz  $f'(x)$ ?

5. Se  $x^2 + yu + xv + w = 0$ ,  $z + y + uvw + 1 = 0$ , então, olhando  $x$  e  $y$  como funções de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , encontramos

$$\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{em} \quad (x, y, u, v, w) = (1, -1, 1, 1, -1).$$

6. As equações  $2x^3y + yx^2 + t^2 = 0$ ,  $x + y + t - 1 = 0$ , definem implicitamente uma curva

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

que satisfaz

$$f(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a reta tangente a  $f$  em  $t = 1$ .

7. Suponhamos que a equação  $x^2/4 + y^2 + z^2/9 - 1 = 0$  defina  $z$  implicitamente como uma função  $z = f(x, y)$  numa vizinhança do ponto  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{11/6}$ ,  $z = 2$ . O gráfico da função  $f$  é uma superfície. Determine o seu plano tangente em  $(1, \sqrt{11/6}, 2)$ .

8. Suponhamos que a equação  $F(x, y, z) = 0$  defina implicitamente  $z = f(x, y)$  e que  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Suponhamos além disso que a superfície que é o gráfico de  $z = f(x, y)$  tem um plano tangente em  $(x_0, y_0)$ . Mostre que

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

é a equação deste plano tangente.

9. As equações

$$2x + y + 2z + y - v - 1 = 0$$

$$xy + z - u + 2v - 1 = 0$$

$$yz + xz + u^2 + v = 0$$

numa vizinhança de  $(x, y, z, u, v) = (1, 1, -1, 1, 1)$  define  $x$ ,  $y$  e  $z$  como funções de  $u$  e  $v$ .

- a) Determine a matriz da diferencial da função definida implicitamente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = f(u, v)$$

em  $(u, v) = (1, 1)$ .

- b) A função  $f$  define parametricamente uma superfície no espaço  $(x, y, z)$ . Determine o plano tangente a ela no ponto  $(1, 1, -1)$ .



## Aula 25 – Teorema da Função Inversa

### Introdução

Nesta aula estudaremos um dos teoremas mais importantes do Cálculo: o Teorema da Função Inversa. Já vimos uma versão deste teorema para funções de uma variável na disciplina de Cálculo I. Estudaremos agora o caso geral deste teorema, quer dizer, estudaremos (com certas adaptações) este resultado para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### Função Inversa

Se imaginarmos que uma função associa vetores  $x$  a vetores  $y$  da imagem de  $f$ , então é natural começar com  $y$  e perguntar que vetor ou vetores  $x$  são levados por  $f$  em  $y$ . Mais precisamente, podemos perguntar se existe uma função que inverte a ação de  $f$ . Se existir uma função  $f^{-1}$  com a propriedade

$$f^{-1}(y) = x \text{ se, e somente se, } f(x) = y,$$

então  $f^{-1}$  é denominada **função inversa** de  $f$ . Segue-se que o domínio de  $f^{-1}$  é a imagem de  $f$  e que a imagem de  $f^{-1}$  é o domínio de  $f$ . Alguns exemplos conhecidos de funções e suas inversas são:

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & x \geq 0 \\ f^{-1}(y) = \sqrt{y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^x, & -\infty < x < +\infty \\ f^{-1}(y) = \ln y, & y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \text{sen } x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ f^{-1}(y) = \text{arcsen } y, & -1 < y < 1 \end{cases}$$

A função inversa  $f^{-1}$  não deve ser confundida com a recíproca  $1/f$ . Por exemplo, se  $f(x) = x^2$ , então  $f^{-1}(2) = \sqrt{2}$ , enquanto que  $(f(2))^{-1} = 1/f(2) = 1/4$ .

Antes de prosseguirmos, recordemos alguns pontos importantes. Uma função é injetiva se cada elemento da imagem é a imagem de precisamente um

elemento do domínio. Como consequência imediata temos que uma função  $f$  tem uma inversa se, e somente se,  $f$  é injetiva. Outro fato bem conhecido da Álgebra Linear é que a função inversa  $L^{-1}$  de toda função linear invertível  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é linear.

Com efeito, usando a linearidade de  $f$ , é fácil ver que

$$\begin{aligned} L^{-1}(ay_1 + by_2) &= L^{-1}(aL(x_1) + bL(x_2)) \\ &= L^{-1}(L(ax_1 + bx_2)) \\ &= I(ax_1 + bx_2) \\ &= ax_1 + bx_2 \\ &= aL^{-1}(y_1) + bL^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

quando  $y_1 = L(x_1)$  e  $y_2 = L(x_2)$  estão na imagem de  $L$ . Se a dimensão de  $\mathbb{R}^n$  é menor do que a de  $\mathbb{R}^m$ , a imagem de  $L$  é um subspaço próprio de  $\mathbb{R}^m$ . Neste caso,  $L^{-1}$  não é definida em todo o  $\mathbb{R}^m$ . Por outro lado, se  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  têm a mesma dimensão, o domínio de  $L^{-1}$  é todo o  $\mathbb{R}^m$ . Assim, a função inversa de toda função linear injetiva  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$  é uma função linear  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L^{-1}} \mathbb{R}^n$ .

### Exemplo 23

Consideremos a função afim  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3$  definida por

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

É óbvio que qualquer função afim  $A(x) = L(x - x_0) + y_0$  é injetiva se, e somente se, a função linear  $L$  também é injetiva. Neste exemplo

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$L(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que  $L$ , e portanto  $A$ , tem uma inversa. De fato, Se  $A(x) = y$ , então

$$A(x) = L(x - x_0) + y_0$$

e

$$A^{-1}(y) = L^{-1}(y - y_0) + x_0. \quad (24)$$

Que esta é a expressão correta para  $A^{-1}$  pode ser verificada substituindo-se  $y$  por  $A(x)$ . Com efeito, observe que

$$A^{-1}(A(x)) = L^{-1}(L(x - x_0)) + x_0 = x$$

como queríamos mostrar.

Assim, temos que a inversa  $A^{-1}$  fica determinada pela expressão a seguir:

$$A^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 1 \\ v - 5 \\ w - 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obviamente este método permitirá calcular a inversa de qualquer transformação afim  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$  se existir.

Temos o seguinte critério para verificar se uma função linear  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^m$  tem uma inversa. Se  $M$  é a matriz de  $L$ , então pelo Teorema 9, as colunas de  $M$  são vetores  $L(e_j)$  e assim geram a imagem de  $L$ . Portanto,  $L$  é injetiva, e tem uma inversa se, e somente se, as colunas de  $M$  são linearmente independentes. De outra maneira, se  $M$  é uma matriz quadrada, então  $L$  tem uma inversa se, e somente se, a matriz inversa  $M^{-1}$  existe. Recordemos que  $M^{-1}$  existe se, e somente se,  $\det M \neq 0$ .

O principal propósito desta seção é o estudo das inversas de funções vetoriais não lineares. Dada uma função  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  podemos perguntar: (1) Ela tem uma inversa? e (2) Se tiver, quais são as suas propriedades? Em geral não é fácil responder a estas perguntas examinando apenas a função. Por outro lado, sabemos como dizer se uma transformação afim tem uma inversa ou não e ainda como calculá-la explicitamente quando ela existe. Além do mais, se  $f$  é diferenciável num ponto  $x_0$  ela pode ser aproximada numa vizinhança deste ponto por uma transformação afim  $A$ . Por esta razão, poder-se-ia conjecturar que, se o domínio de  $f$  for restrito aos pontos próximos

de  $x_0$ , então  $f$  terá uma inversa, se  $A$  tiver. Além disso, poder-se-ia pensar que  $A^{-1}$  é a transformação afim que aproxima  $f^{-1}$  numa vizinhança de  $f(x_0)$ . Exceto pelos detalhes, estas afirmações estão corretas e constituem o teorema da função inversa.

**Teorema 10 (Teorema da Função Inversa)**

Seja  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  uma função continuamente diferenciável tal que  $f'(x_0)$  tem uma inversa. Então existe um conjunto aberto  $N$ , contendo  $x_0$  tal que  $f$  quando restrita a  $N$  tem uma inversa continuamente diferenciável  $f^{-1}$ . O conjunto imagem  $f(N)$  é aberto. Além disso,

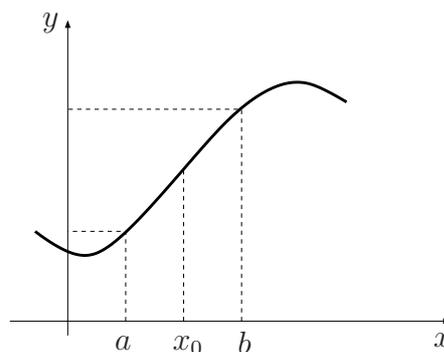
$$[f^{-1}]'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}$$

em que  $y_0 = f(x_0)$ , isto é, a diferencial da função inversa em  $y_0$  é a inversa da diferencial de  $f$  em  $x_0$ .

A demonstração da existência de  $f^{-1}$  pode ser encontrada no texto de Williamson & Trotter (esta leitura é opcional). Uma vez estabelecida a existência, podemos escrever  $f^{-1} \circ f = I$ , em que  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{I} \mathbb{R}^n$  é a transformação identidade na vizinhança  $N$ . Como a diferencial da transformação identidade é ela própria, temos, pela regra da cadeia, que:

$$[f^{-1}]'(y_0)f'(x_0) = I \quad \text{ou} \quad [f^{-1}]'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}.$$

Para funções reais de uma variável, a existência de uma função inversa não é difícil de demonstrar. Suponhamos que  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  satisfaça a condição de diferenciabilidade do teorema e suponhamos que  $f'(x_0)$  tem uma matriz inversa. Como a matriz inversa existe quando  $f'(x_0) \neq 0$ , o significado geométrico da condição de que  $f'(x_0)$  tem uma inversa é o de que o gráfico de  $f$  não deve ter uma tangente horizontal. Para ser específico, suponhamos que  $f'(x_0) > 0$ . Como  $f'$  é contínua, temos  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  em algum intervalo  $a < x < b$  que contém  $x_0$ , como ilustra a figura a seguir.



Afirmamos que  $f$  restrita a este intervalo é injetiva. Pois suponhamos que  $x_1$  e  $x_2$  são dois pontos quaisquer do intervalo tais que  $x_1 < x_2$ . Pelo teorema do valor médio segue-se que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

para algum  $c$  do intervalo  $x_1 < x < x_2$ . Como  $f'(c) > 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$ , obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Portanto,  $f$  é estritamente crescente no intervalo  $a < x < b$ , e a nossa afirmação está demonstrada. Segue-se que  $f$  restrito a este intervalo tem uma inversa. As outras conclusões do teorema da função inversa podem também ser obtidas de modo imediato para este caso especial.

#### Exemplo 24

Consideremos a função  $f$  definida por

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}.$$

No ponto

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a diferencial  $d_{\mathbf{x}_0}f$  é definida pela matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{x=1, y=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A inversa desta matriz é

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Como  $f$  é obviamente diferenciável, concluímos pelo teorema da função inversa que em um conjunto aberto contendo  $\mathbf{x}_0$  a função  $f$  tem uma inversa  $f^{-1}$ . Além disso, se

$$\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a matriz da diferencial  $d_{\mathbf{y}_0}f^{-1}$  é

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Embora possa ser difícil calcular  $f^{-1}$  explicitamente, é fácil escrever a transformação afim que aproxima  $f^{-1}$  na vizinhança do ponto  $y_0$ . É a inversa  $A^{-1}$  da transformação afim  $A$  que aproxima  $f$  numa vizinhança de  $x_0$ . Temos, ou pelo teorema da função inversa ou pela fórmula (24) do exemplo 24,

$$\begin{aligned} A(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \\ A^{-1}(y) &= f^{-1}(y_0) + [f^{-1}]'(y_0)(y - y_0) \\ &= x_0 + [f'(x_0)]^{-1}(y - y_0). \end{aligned}$$

Donde, se fizermos  $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , teremos

$$A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

#### Exemplo 25

As equações

$$u = x^4y + x \quad \text{e} \quad v = x + y^3$$

definem uma transformação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . A matriz diferencial da transformação em  $(x, y) = (1, 1)$  é

$$\begin{pmatrix} 4x^3y + 1 & x^4 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como as colunas desta matriz são independentes, a diferencial tem uma inversa, e conforme o teorema da função inversa a transformação também tem uma inversa numa vizinhança aberta de  $(x, y) = (1, 1)$ . A transformação inversa deve ser dada por equações da forma

$$x = F(u, v) \quad \text{e} \quad y = G(u, v).$$

O cálculo efetivo de  $F$  e  $G$  é difícil, mas podemos facilmente calcular as derivadas parciais de  $F$  e de  $G$  em relação a  $u$  e  $v$  no ponto  $(u, v) = (2, 2)$  que corresponde a  $(x, y) = (1, 1)$ . Estas derivadas parciais ocorrem na matriz jacobiana de  $F$  e de  $G$  ou, equivalentemente, na matriz inversa da diferencial das funções dadas. Temos então:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(2, 2) & \frac{\partial F}{\partial v}(2, 2) \\ \frac{\partial G}{\partial u}(2, 2) & \frac{\partial G}{\partial v}(2, 2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/14 & -1/14 \\ -1/14 & 5/14 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  seja uma função para a qual as hipóteses do teorema da função inversa são satisfeitas num ponto  $x_0$ . É importante compreender que o teorema não resolve a questão da existência de uma inversa para toda a função  $f$ , mas apenas para  $f$  restrita a um conjunto aberto contendo  $x_0$ . Por exemplo, a transformação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}, \quad u > 0,$$

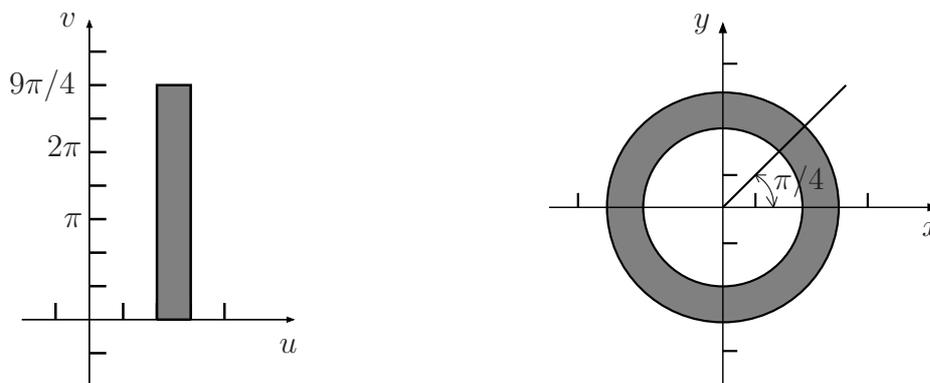
tem matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}$$

com matriz inversa

$$\begin{bmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{1}{u} \sin v & \frac{1}{u} \cos v \end{bmatrix}.$$

A matriz inversa existe para todo  $(u, v)$  satisfazendo  $u > 0$ . Entretanto, se não tomamos uma restrição conveniente, a transformação pode não ter inversa, pois obtém-se o mesmo ponto imagem, quando  $v$  aumenta de  $2\pi$ . Veja as duas regiões na figura a seguir. Se a transformação for restringida de modo que, por exemplo,  $0 < v < 2\pi$ , então ela torna-se injetiva e tem uma inversa.



### Exercícios Propostos

1. Calcule  $A^{-1}$  para as seguintes funções afins:

a)  $A(x) = 7x + 2$

b)  $A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - 1 \\ v - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

2. Seja

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que, para todo ponto  $x_0$ , exceto  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  a restrição de  $f$  a algum conjunto aberto contendo  $x_0$  tem uma inversa.

b) Mostre que, se não restringirmos o domínio,  $f$  não tem inversa.

c) Se  $f^{-1}$  é a inversa de  $f$  numa vizinhança do ponto  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , calcule a transformação afim que aproxima  $f^{-1}$  numa vizinhança de

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Determine a função afim que melhor aproxima a inversa da função

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 2xy + y^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

numa vizinhança do ponto  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Observe que deve ser difícil calcular a inversa.

4. a) Seja  $T$  definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}.$$

Calcule  $T'(u)$  e a sua inversa para os pontos

$$u = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$

para os quais elas existem.

b) Seja  $S$  definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} r > 0 \\ 0 < \phi < \pi/20 < \theta < 2\pi \end{cases}.$$

Calcule  $S'(u)$  e a sua inversa para os pontos

$$u = \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}$$

para os quais elas existem.

c) Calcule uma representação explícita para  $S^{-1}$ .

5. Suponhamos que a função  $T$  definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

tem uma função inversa diferenciável  $S$  definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(u, v) \\ k(u, v) \end{pmatrix}.$$

Se  $f(1, 2) = 3$ ,  $g(1, 2) = 1$  e  $T'(1, 2)$  é igual a  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ , calcule  $\frac{\partial h}{\partial v}(3, 4)$ .

6. Se

$$\begin{cases} x = u + v + w \\ y = u^2 + v^2 + w^2 \\ z = u^3 + v^3 + w^3 \end{cases}$$

calcule  $\partial v / \partial y$  na imagem de  $(u, r, w) = (1, 2, -1)$  a saber,  $(x, y, z) = (2, 6, 8)$ .

7. Seja

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + u^2v + 10w \\ u + v^3 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que  $f$  tem uma inversa  $f^{-1}$  na vizinhança do ponto  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

b) Calcule um valor aproximado de

$$f^{-1} \begin{pmatrix} 11, 8 \\ 2, 2 \end{pmatrix}.$$

8. A função

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

tem uma inversa?



## Aula 26 – Teorema da Função Implícita

### Introdução

Na aula 24 consideramos o problema do cálculo das derivadas de uma função  $f$  definida implicitamente por uma equação do tipo  $F(x, f(x)) = 0$ , sendo  $f$  e  $F$  ambas diferenciáveis. Vimos que, para que fosse possível calcular  $f'(x_0)$  pelos métodos matriciais foi necessário que  $F_y(x_0, f(x_0))$  tivesse uma inversa. É natural que a mesma condição ocorra no caso geral do Teorema da Função Implícita. A demonstração desse teorema é feita usando o teorema da função inversa e pode ser encontrada também no texto de Williamson & Trotter. No entanto, o que interessa-nos num curso de Cálculo é que você saiba interpretá-lo e aplicá-lo em algumas situações. Vamos ao teorema.

### Teorema 11 (Teorema da Função Implícita)

Seja  $\mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$  uma função continuamente diferenciável. Suponhamos que para algum  $x_0$  de  $\mathbb{R}^n$  e algum  $y_0$  de  $\mathbb{R}^m$ :

1.  $F(x_0, y_0) = 0$ .
2.  $F_y(x_0, y_0)$  tem uma inversa.

Então existe uma função continuamente diferenciável  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$  definida numa vizinhança  $N$  de  $x_0$  tal que  $f(x_0) = y_0$  e  $F(x, f(x)) = 0$ , para todo  $x \in N$  e, além disso, a derivada de  $f$  é dada por

$$f'(x) = -[F_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F_x(x, f(x))].$$

### Exemplo 26

A equação  $x^3y + y^3x - 2 = 0$  define  $y = f(x)$  implicitamente numa vizinhança de  $x = 1$ , se  $f(1) = 1$ . Como uma função de  $y$ ,  $x^3y + y^3x - 2$  tem jacobiana  $(1 + 3y^2)$  em  $x = 1$ , e esta última é invertível em  $y = 1$ , isto é,

$$1 + 3y^2 \Big|_{y=1} = 4 \neq 0.$$

Note que apesar de concluirmos pelo teorema da função implícita que  $y$  é definida implicitamente como uma função de  $x$ , não determinamos esta

## Cálculo III

função. Neste exemplo, entretanto, podemos determinar a função  $y = f(x)$  usando a fórmula por radicais para uma equação do terceiro grau em  $y$ , isto é:

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^{10} + 27}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^{10} + 27}{27}}}.$$

## Exemplo 27

As equações

$$z^3x + w^2y^3 + 2xy = 0 \text{ e } xyzw - 1 = 0 \quad (25)$$

podem ser escritas na forma  $F(x, y) = 0$ , em que  $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$  e

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} z^3x + w^2y^3 + 2xy \\ xyzw - 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam  $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , e  $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Então

$$F(x_0, y) = \begin{pmatrix} -z^3 - w^2 + 2 \\ xw - 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz  $F_y(1, 1)$  é

$$F(x_0, y) = \begin{pmatrix} -3z^2 & 2w \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A inversa existe e é a matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

É então uma conseqüência do teorema da função implícita que as equações (25) definem implicitamente uma função  $f$  num conjunto aberto em torno de  $x_0$  tal que  $f(x_0) = y_0$ , isto é, temos

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e assim  $z$  e  $w$  são funções de  $x$  e  $y$  numa vizinhança de

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercícios Propostos**

1. Consideremos a equação  $(x - 2)^3 y + x e^{y-1} = 0$ .

a)  $y$  é definido implicitamente como uma função de  $x$  numa vizinhança de  $(x, y) = (1, 1)$ ?

b) Numa vizinhança de  $(0, 0)$ ?

2. O ponto  $(x, y, t) = (0, 1, -1)$  satisfaz às equações

$$xyt + \operatorname{sen} xyt = 0 \quad \text{e} \quad x + y + t = 0.$$

São  $x$  e  $y$  definidas implicitamente como funções de  $t$  numa vizinhança de  $(0, 1, -1)$ ?

3. A condição 2 no teorema da função implícita de que  $F_Y(x_0, y_0)$  tem uma inversa não é necessária para que a equação  $F(x, y) = 0$  defina uma única função diferenciável  $f$  tal que  $f(x_0) = y_0$ . Mostre isto considerando  $F(x, y) = x^9 - y^3$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

