Introdução

à

Geometria Algébrica

versão 1.0 - março 2009

Notas de aula

por Juliana Coelho

Sumário

O texto a seguir consiste nas notas de aula do curso de Introdução à Geometria Algébrica, dado por mim no verão de 2009 da UFF. Para a confecção deste texto, me baseei no livro de I. Shafarevich e nas notas de aula do curso de Geometria Algébrica I dado pelo prof. Karl Otto Stohr no IMPA em 2003. Muitos assuntos aparecem aqui com uma abordagem idêntica à destes textos e, nestes casos, meu trabalho foi apenas o de traduzir e unificar a linguagem com a do resto do texto. Minha intenção é somente a de condensar material em português para um curso introdutório de Geometria Algébrica. Por isso, incluí um grande número de exemplos que, espero, contribuem para o melhor entendimento dos conceitos. Além disso, incluí ao final as listas de exercícios e as provas realizadas no curso.

1 Variedades Afins

1.1 Topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n$

Os objetos principais da Geometria Algébrica são as variedades algébricas, isto é, objetos geométricos (variedades) definidas por polinômios (algébricas).

Seja k um corpo. Assumiremos sempre que k é algebricamente fechado, a menos que seja explicitado o contrário. Denotamos por $\mathbb{A}^n$ ou $\mathbb{A}^n_k$ o espaço afim n-dimensional sobre k, isto é, $\mathbb{A}^n = k^n$. Vamos imbuir $\mathbb{A}^n$ de uma topologia.

Considere o anel de polinômios $k[T_1, \ldots, T_n]$ nas variáveis $T_1, \ldots, T_n$ com coeficientes em k. Seja $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ um subconjunto. Denotamos por

$$Z(S) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \,\forall f \in S\}$$

o *conjunto de zeros de* S.

Lema 1.1 *(a)* $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ *e* $Z(k[T_1, \ldots, T_n]) = \emptyset$*;*

(b) Se S_1 *e* S_2 *são subconjuntos de* $k[T_1, \ldots, T_n]$ *com* $S_1 \subset S_2$*, então* $Z(S_2) \subset Z(S_1)$*;*

(c) Dada uma família S_i *de subconjuntos de* $k[T_1, \ldots, T_n]$*, então* $\cap_i Z(S_i) = Z(\cup_i S)$*;*

(d) Se S_1 *e* S_2 *são subconjuntos de* $k[T_1, \ldots, T_n]$*, então* $Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S)$ *onde* $S = S_1 S_2 := \{f_1 \cdot f_2 | f_i \in S_i,\, i = 1, 2\}$.

Demonstração. As afirmações (a), (b) e (c) são óbvias. Vamos mostrar (d).

Primeiro tome $x \in Z(S_1) \cup Z(S_2)$. Então $x \in Z(S_i)$ para algum $i = 1, 2$ e logo $f_i(x) = 0$ para todo $f_i \in S_i$. Portanto $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = 0$ para todo $f_1 \in S_2$ e $f_2 \in S_2$, implicando que $x \in Z(S)$.

Reciprocamente, tome $x \in Z(S)$. Suponha que $x \notin Z(S_1)$. Então existe $f_1 \in S_1$ tal que $f_1(x) \neq 0$. Mas $f_1(x) f_2(x) = 0$ para todo $f_2 \in S_2$ e logo $f_2(x) = 0$ para todo $f_2 \in S_2$, isto é, $x \in Z(S_2)$. $\square$

Definição. Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é *fechado* se $X = Z(S)$ para algum $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$. Assim, um subconjunto *aberto* de $\mathbb{A}^n$ é o complementar de um fechado.

(Os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$ são também chamados de conjuntos algébricos afins. Contudo, nestas notas, um conjunto algébrico será um objeto mais geral que um fechado afim e será definido na Seção 2.)

Corolário 1.2 *Os subconjuntos abertos de* $\mathbb{A}^n$ *formam uma topologia chamada* topologia de Zariski.

Demonstração. De fato, como conseqüência do lema temos que

* $\emptyset$ e $\mathbb{A}^n$ são abertos;

* união de abertos é aberta;

* interseção finita de abertos é aberta. □

Exemplos. 1 - É fácil descrever os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^1$. Como polinômios em uma variável têm apenas um número finito de zeros, os fechados de $\mathbb{A}^1$ são subconjuntos finitos. Em particular, $\mathbb{A}^1$ não é um espaço topológico de Hausdorff. (Lembre que um espaço topológico X é de Hausdorff se para cada par de pontos distintos x_1 e x_2 em X existem abertos U_1 e U_2 de X tais que $x_i \in U_i$ para $i = 1, 2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.)

2 - Agora descreveremos os fechados em $\mathbb{A}^2$. Tome $g(T_1, T_2) \in k[T_1, T_2]$. O fechado

$$Z(g) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 | g(x_1, x_2) = 0\}$$

é chamado uma *curva (algébrica) plana afim*. Note que como k é um corpo infnito (por ser algebricamente fechado), o conjunto $Z(g)$ é infinito. Por exemplo, se $g(T_1, T_2) = T_2(T_2^2 - T_1)$ então

$$Z(g) = \{(t, 0) | t \in k\} \cup \{(t^2, t) | t \in k\}.$$

Tome $S \subset k[T_1, T_2]$ e seja $X = Z(S)$. Suponha que $\emptyset \neq X \neq \mathbb{A}^2$. Queremos descrever X. Primeiro supomos que os polinômios de S não têm fator comum não constante. Então podemos escolher $f_1, \ldots, f_r \in S$ sem divisor comum em $k[T_1, T_2]$. Pelo lema de Gauss, $f_1, \ldots, f_r$ não têm divisor comum em $k(T_1)[T_2]$. Como $k(T_1)[T_2]$ é Euclidiano, pelo algoritmo de Euclides existem $g_1, \ldots, g_r \in k(T_1)[T_2]$ tais que

$$1 = f_1 g_1 + \ldots + f_r g_r.$$

Seja $d \in k[T_1]$ o denominador comum de $g_1, \ldots, g_r$, de modo que cada g_i se escreve $g_i = h_i/d$ com $h_i \in k[T_1, T_2]$ para $i = 1, \ldots, r$. Logo temos

$$d = f_1 h_1 + \ldots + f_r h_r.$$

Assim, se $(x_1, x_2) \in X$ então $f_i(x_1, x_2) = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ e logo $d(x_1) = 0$. Como d é polinômio em uma variável, então tem apenas um número finito de raízes e logo existem apenas um número finito de possibilidades para x_1. Analogamente, existem apenas um número finito de possibilidades para x_2. Portanto X é finito.

Por outro lado, suponha que os polinômios de S têm divisor comum. Seja g o máximo divisor comum dos $f \in S$. Então X contém a curva $Z(g)$. Agora, existe $S' \in k[T_1, T_2]$ tal que cada $f \in S$ é da forma $f = gh$ com $h \in S'$. Pelo Lema 1.1 (d), temos

$$X = Z(S) = Z(g) \cup Z(S').$$

Como os polinômios de S' não têm fator comum não constante, então $Z(S')$ é finito. Logo os fechados de $\mathbb{A}^2$ são da forma

$$X = \text{curva plana afim} \bigcup \text{número finito de pontos}.$$

Por exemplo, se $S = (T_2(T_2^2 - T_1),\, T_2(T_1 - 1))$, então $X = Z(S)$ é dado por

$$\begin{aligned} X &= Z(T_2) \cup Z(T_2^2 - T_1,\, T_1 - 1) \\ &= \{(t, 0) | t \in k\} \cup \{(1, 1),\, (1, -1)\}. \end{aligned}$$

Considere um fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$ dado por $X = Z(S)$ com $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$. Denotamos por $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S em $k[T_1, \dots, T_n]$. Note que $X = Z(S) = Z(\langle S \rangle)$. Mais ainda, suponha que $\langle S \rangle$ é finitamente gerado, isto é, que existe um número finito de polinômios $f_1, \dots, f_r \in k[T_1, \dots, T_n]$ tais que $\langle S \rangle = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Então temos $X = Z(f_1, \dots f_r)$, já que todo $f \in \langle S \rangle$ é da forma $f = h_1 f_1 + \ldots + h_r f_r$ com $h_1, \dots, h_r \in k[T_1, \dots, T_n]$.

Definição. Um anel A é dito *Noetheriano* se, equivalentemente,

(i) cada ideal de A é finitamente gerado;

(ii) cada cadeia ascendente de ideais $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ é estacionária, isto é, existe n tal que $I_n = I_{n+\ell}$ para todo $\ell \geq 0$;

(iii) cada conjunto não vazio de ideais de A tem um elemento maximal.

Por exemplo, todo corpo k (não necessariamente algebricamente fechado) é anel Noetheriano, pois seus únicos ideais são $\langle 0 \rangle$ e k. O anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros é Noetheriano pois todo ideal em $\mathbb{Z}$ é principal, isto é, gerado por um único elemento.

Veremos a seguir que o anel de polinômios em n variáveis sobre um corpo k não necessariamente fechado é Noetheriano. Este resultado é conhecido como teorema da base de Hilbert. Hilbert foi responsável por três teoremas fundamentais em Geometria Algébrica: o teorema da base, o teorema dos zeros e o teorema das sizígias (que não veremos neste curso).

Teorema 1.3 (Teorema da Base de Hilbert) *Se A é anel Noetheriano, então o anel de polinômios em uma variável $A[T]$ também é Noetheriano.*

Demonstração. Suponha que $A[T]$ não é Noetheriano e tome um ideal $J \subset A[T]$ que não seja finitamente gerado. Escolhemos elementos $f_1, f_2, \ldots \in J$ da seguinte forma. Escolha $f \in J - \{0\}$ de menor grau e para cada r, se $f_1, \ldots, f_{r-1}$ estão escolhidos, tome

$$f_r \in J - \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$$

de menor grau.

Para cada $r \geq 1$ seja n_r o grau de f_r e $a_r \in A$ o coeficiente do termo de grau n_r em f_r. Então $n_1 \leq n_2 \leq \ldots$ e temos cadeia ascendente de ideais de A

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \ldots \subset A.$$

Como A é Noetheriano, esta cadeia é estacionária e logo temos

$$\langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \langle a_1, \ldots, a_r, a_{r+1} \rangle$$

e portanto

$$a_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$$

com $c_i \in A$. Mas então o polinômio

$$f_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i f_i T^{n_{r+1}-n_i} \in J - \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$$

tem grau menor que n_{r+1}, contrariando a escolha de f_{r+1}. Assim $A[T]$ é Noetheriano. $\square$

Corolário 1.4 *Se A é Noetheriano então o anel de polinômios $A[T_1, \ldots, T_n]$ em n variáveis também é Noetheriano. Em particular $k[T_1, \ldots, T_n]$ é Noetheriano e todo fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$ pode ser descrito por um número finito de equações, isto é, ser dado na forma $X = Z(f_1, \ldots, f_r)$ com $f_1, \ldots, f_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$.*

Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto qualquer. Definimos o *ideal* de X como

$$I(X) = \{f \in k[T_1, \ldots, T_n] | f(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

É fácil ver que $I(X)$ é de fato um ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Lema 1.5 *(a)* $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ *e* $I(\emptyset) = k[T_1, \ldots, T_n]$*;*

(b) Se X_1 *e* X_2 *são subconjutos de* $\mathbb{A}^n$ *com* $X_1 \subset X_2$ *então* $I(X_2) \subset I(X_1)$*;*

(c)Para $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ *e* $X \subset \mathbb{A}^n$ *subconjuntos temos* $S \subset I(Z(S))$ *e* $X \subset Z(I(X))$*;*

(d) Para X *e* Y *subconjuntos de* $\mathbb{A}^n$ *temos* $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$*.*

Demonstração. Óbvio. □

Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto. O *fecho* de X é o menor fechado $\overline{X}$ de $\mathbb{A}^n$ contendo X, ou seja, se W é um fechado de $\mathbb{A}^n$ contendo X então W contém $\overline{X}$.

Exemplo. O fecho de $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 | x_2 = 0,\, x_1 \neq 0\}$ é $\overline{X} = \{(x_1, x_1) \in \mathbb{A}^2 | x_2 = 0\}$.

Proposição 1.6 *Se* X *é um subconjunto de* $\mathbb{A}^n$ *então* $\overline{X} = Z(I(X))$*.*

Demonstração. Primeiro note que, pelo Lema 1.5 (c), $Z(I(X))$ é um fechado contendo X.

Agora tome $W \subset \mathbb{A}^n$ um fechado contendo X. Temos que mostrar que W contém $Z(I(X))$. Como W é fechado, temos $W = Z(S)$ para algum $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$. Como $X \subset W$ então, pelo Lema 1.5 (b), $S \subset I(W) \subset I(X)$ e portanto $Z(I(X)) \subset Z(S) = W$. □

Seja A um anel e $J \subset A$ um ideal. O *radical* de J é

$$\sqrt{J} = \{f \in A | f^r \in J \,\text{para algum}\; r \in \mathbb{N}\}.$$

Note que $\sqrt{J}$ é um ideal de A. De fato, tome $f, g \in \sqrt{J}$. Então $f^r, g^s \in J$ para algum $r, s \in \mathbb{N}$ e temos

$$(f+g)^{r+s} = c_0 f^{r+s} + c_1 f^{r+s-1} g + \ldots + c_s f^r g^s + \ldots + c_{r+s-1} f g^{r+s-1} + c_{r+s} g^{r+s} \in J,$$

onde $c_0, \ldots, c_{r+s} \in A$ são coeficientes binomiais. Assim, $f + g \in \sqrt{J}$. Além disso, se $h \in A$, então $(hf)^r = h^r f^r \in J$ e logo $hf \in \sqrt{J}$. Dizemos que o ideal J é um *ideal radical* se $J = \sqrt{J}$.

Exemplo. $\sqrt{\langle T_1^2, T_2^3 \rangle} = \langle T_1, T_2 \rangle$

Teorema 1.7 (Nullstellensatz, Teorema dos Zeros de Hilbert) *Para cada ideal* $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$*, temos* $I(Z(J)) = \sqrt{J}$*.*

A demonstração que veremos deste teorema é similar à dada por Zariski. Precisamos de um resultado preliminar conhecido como Lema de Zariski. Neste resultado o corpo k não precisa ser algebricamente fechado.

Teorema 1.8 *Seja k um corpo (não necessariamente algebricamente fechado) e tome K uma extensão de k. Assuma que K é finitamente gerado como k-álgebra, isto é, que existem $f_1, \ldots, f_n \in K$ tais que $K = k[f_1, \ldots, f_n]$. Então K é algébrico sobre k.*

Demonstração. Suponha que K é trancendente sobre k. Primeiro supomos que o grau de trancendência é 1, isto é, que para algum $x \in K$ temos

$$k \subset k(x) \subset K$$

com K algébrico sobre $k(x)$. Então K é finitamente gerado como $k(x)$-álgebra e, como é algébrico sobre $k(x)$, sua dimensão como $k(x)$-espaço vetorial é finita. Tome $e_1, \ldots, e_m \in K$ uma base de K como $k(x)$-espaço vetorial. Os produtos $e_r e_s$ estão em K e logo se escrevem como

$$e_r e_s = \sum_{t=1}^{m} \frac{a_{rst}(x)}{b_{rst}(x)} e_t \tag{1}$$

com $a_{rst}(x)$, $b_{rst}(x) \in k[x]$.

Vamos mostrar que para qualquer escolha de $f_1, \ldots, f_n \in K$ temos uma inclusão estrita

$$A := k[f_1, \ldots, f_n] \subsetneq K,$$

ou seja, que K não é finitamente gerado como k-álgebra. Tome $f_0 = 1$ e para cada $\ell = 0, \ldots, n$ escreva

$$f_\ell = \sum_{r=1}^{m} \frac{c_{\ell r}(x)}{d_{\ell r}(x)} e_r \tag{2}$$

onde $c_{\ell r}(x)$, $d_{\ell r}(x) \in k[x]$. Como cada $a \in A$ é combinação k-linear de $f_0 = 1$ e produtos de $f_1, \ldots, f_n$, usando (2) vemos que cada a é combinação $k(x)$-linear de produtos de $e_1, \ldots, e_m$. Assim, por (1), a é então combinação $k(x)$-linear de $e_1, \ldots, e_m$. Note que a é da forma

$$a = \frac{1}{\text{produto de } b_{rst}(x)\text{'s e } d_{\ell r}(x)\text{'s}} \sum_{i=1}^{m} h_i(x) e_i$$

com $h_i(x) \in k[x]$. Deste modo, dado $g(x) \in k[x]$ irredutível que não é fator de nenhum $b_{rst}(x)$ ou $d_{\ell r}(x)$, temos $1/g(x) \notin A$. Mas é claro que $1/g(x) \in K$ e logo $A \subsetneq K$.

Agora, se o grau de transcendência de K sobre k é maior que 1, tomamos um corpo k' com $k \subset k' \subset K$ e tal que o grau de trancendência de K sobre k' seja 1. Pelo argumento acima, K não é uma k'-álgebra finitamente gerada, e logo não é uma k-álgebra finitamente gerada. $\square$

Teorema 1.9 (Teorema fraco dos zeros) *Todo ideal maximal do anel $k[T_1, \ldots, T_n]$ é da forma $(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ com $x_1, \ldots x_n \in k$. Como conseqüência, um conjunto de polinômios em $k[T_1, \ldots, T_n]$ sem zeros em comum em $\mathbb{A}^n$ gera o ideal unitário em $k[T_1, \ldots, T_n]$.*

Demonstração. Tome $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ um ideal maximal. Então o quociente $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ é um corpo contendo k. Além disso, este corpo é uma k-álgebra finitamente gerada, pois $k[T_1, \ldots, T_n]$ o é. Pelo Teorema 1.8, $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m}$ é uma extensão algébrica de k. Como k é algebricamente fechado, temos que ter $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m} = k$. Considre o mapa natural

$$\phi : k[T_1, \ldots, T_n] \to k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{m} = k$$

e tome $x_i = \phi(T_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Então o ideal maximal $(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ está contido em $\mathfrak{m}$, e portanto é igual a $\mathfrak{m}$.

Agora tome J o ideal gerado por um conjunto de polinômios sem zeros em comum. Se J está contido no ideal $(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$, então os polinômios têm zero comum em $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$. Logo J não pode estar contido em nenhum ideal maximal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ e portanto temos que ter $J = k[T_1, \ldots, T_n]$. □

Demonstração do Teorema 1.7. (Truque de Rabinowich.)

Seja $J \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ um ideal, queremos mostrar que $I(Z(J)) = \sqrt{J}$. Como $k[T_1, \ldots, T_n]$ é Noetheriano, então $J = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Temos que mostrar que um polinômio $g \in k[T_1, \ldots, T_n]$ se anula nos zeros comuns de $f_1, \ldots, f_m$ se e somente se $g^r \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Ora, se $g^r \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ então é óbvio que g^r (e logo g) se anula nos zeros comuns de $f_1, \ldots, f_m$.

Agora suponha que g se anula nos zeros comuns de $f_1, \ldots, f_m$ e considere os polinômios $g, f_1, \ldots, f_m$ como elementos do anel $k[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]$. Note que os polinômios $f_1, \ldots, f_m$ e $T_{n+1}g - 1$ não têm zeros em comum em $\mathbb{A}^{n+1}$ e, pelo Teorema 1.9, podemos escrever

$$1 = p_1 f_1 + \ldots + p_m f_m + p_{m+1}(T_{n+1}g - 1)$$

com $p_1, \ldots, p_m, p_{m+1} \in k[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]$. Fazendo $T_{n+1} = 1/g$, temos

$$1 = p_1(T_1, \ldots, T_n, 1/g) f_1 + \ldots + p_m(T_1, \ldots, T_n, 1/g) f_m.$$

Multiplicando por uma potência apropriada de g, obtemos

$$g^r = q_1 f_1 + \ldots + q_m f_m$$

com $q_1, \ldots, q_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$. □

Corolário 1.10 *Existe bijeção revertendo inclusões*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{fechados em } \mathbb{A}^n\} & \leftrightarrow & \{\textit{ideais radicais em } k[T_1, \ldots, T_n]\} \\ X & \mapsto & I(X) \\ Z(J) & \leftarrow & J \end{array}$$

A topologia de Zariski de $\mathbb{A}^n$ pode ser estendida da maneira usual a um subconjunto X de $\mathbb{A}^n$ (não necessariamente fechado). Assim, um aberto (resp. fechado) de X é a interseção de um aberto (resp. fechado) de $\mathbb{A}^n$ com X.

Obs. (Topologia Fraca-*) Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto. Vejamos que as funções polinomiais $f : X \to k$ são contínuas na topologia de Zariski. (Uma função deste tipo é chamada *regular* e será estudada mais a fundo na seção 1.2.) Precisamos mostrar que a imagem inversa de um fechado de $k = \mathbb{A}^1$ é um fechado de X, isto é, a interseção de X com um fechado de $\mathbb{A}^n$. Ora, os fechados próprios de $\mathbb{A}^1$ são conjuntos finitos de pontos, logo basta notar que, para cada $a \in k = \mathbb{A}^1$, temos

$$f^{-1}(a) = \{x \in X | f(x) = a\} = X \cap Z(f - a)$$

fechado em X.

Definição. Um espaço topológico X é *irredutível* se, equivalentemente,

(i) X não é união de dois fechados próprios;

(ii) quaisquer dois abertos não vazios de X se intersectam;

(iii) todo aberto não vazio de X é denso em X.

Exemplo. 1 - Seja $X = Z(T_1T_2) \subset \mathbb{A}^2$. Então X não é irredutível pois

$$X = \{(0, t)|t \in k\} \cup \{(t, 0)|t \in k\} = Z(T_1) \cup Z(T_2).$$

2 - $\mathbb{A}^1$ é irredutível pois seus fechados próprios são conjuntos finitos de pontos. Na verdade $\mathbb{A}^n$ é irredutível para todo n. Para mostrar esta afirmação diretamente precisaríamos descrever os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$, o que não é uma tarefa trivial. Porém, este resutado seguirá facilmente da Proposição 1.12.

Proposição 1.11 *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ se escreve de forma única como união finita*

$$X = W_1 \cup \ldots \cup W_r$$

onde W_i é um fechado irredutível de X para cada i e $W_i \not\subset W)j$ se $i \neq j$.

Dizemos que $W_1, \ldots, W_r$ são as *componentes irredutíveis* de X. Note que o fato de cada W_i ser fechado em X não implica que X seja fechado em $\mathbb{A}^n$!

Demonstração. Suponha que o resultado não vale para X. Em particular, X não é irredutível e $X = X_1 \cup X_1'$ com X_1, X_1' fechados próprios de X. Pelo menos um destes conjuntos não satisfaz a proposição, pois caso contrário X também satisfaria. Suponha que X_1 não satisfaz o resultado.

Então X_1 não é irredutível e se escreve $X_1 = X_2 \cup X_2'$ com X_2, X_2' fechados próprios de X_1. Novamente um destes conjuntos, digamos X_2, não satisfaz a proposição. Procedendo deste modo, obtemos uma cadeia infinita

$$X = X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots \tag{3}$$

de subconjuntos de $\mathbb{A}^n$. Note que os conjuntos X_i são fechados em X. Seja $J_n = I(X_n)$ para $n \geq 0$. Então temos cadeia ascendente de ideais

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset k[T_1, \ldots, T_n].$$

Como $k[T_1, \ldots, T_n]$ é Noetheriano, temos $J_m = J_{m+1}$ para algum $m \geq 0$. Assim $I(X_m) = I(X_{m+1})$ e, pela Proposição 1.6, temos $\overline{X}_m = \overline{X}_{m+1}$. Ora, cada X_i é fechado em X e logo se escreve $X_i = X \cap Y_i$ com Y_i fechado em $\mathbb{A}^n$. Assim temos

$$\overline{X} \cap Y_m = \overline{X \cap Y_m} = \overline{X \cap Y_{m+1}} = \overline{X} \cap Y_{m+1}$$

e portanto

$$X_m = X \cap (\overline{X} \cap Y_m) = X \cap (\overline{X} \cap Y_{m+1}) = X_{m+1}$$

contrariando (3). Isso mostra a primeira parte da proposição.

Vamos agora mostrar a unicidade da decomposição em componentes irredutíveis. Suponha que

$$X = W_1 \cup \ldots W_r = W_1' \cup \ldots W_s'$$

com W_i, W_j' como no enunciado, para $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, s$. Então para cada i temos

$$W_i = W_i \cap X = W_i \cap (\cup_j W_j') = \cup_j (W_j' \cap W_i).$$

Como W_i é irredutível e as interseções $W_j' \cap W_i$ são fechados em W_i, temos que ter $W_i = W_i \cap W_j'$ para algum j. Assim $W_i \subset W_j'$. Do mesmo modo, temos

$$W_j' = W_j' \cap X = \cup_\ell (W_j' \cap W_\ell)$$

e, como W_j' é irredutível e $W_i \cap W_j' \neq \emptyset$, então temos $W_j' = W_j' \cap W_i$, ou seja, $W_j' \subset W_i$. Assim $W_i = W_j'$. Procedendo deste modo para cada i, j obtemos a unicidade. □

Exemplo. As componentes irredutíveis de $X = Z(T_2(T_2^2 - T_1)) \subset \mathbb{A}^2$ são $W_1 = Z(T_2)$ e $W_2 = Z(T_2^2 - T_1)$. É fácil ver que W_1 e W_2 são fechados em X cuja união é X. A próxima proposição mostrará que W_1 e W_2 são de fato irredutíveis.

Definição. Uma *variedade afim* é um fechado afim irredutível. Para $X \subset \mathbb{A}^n$, dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é uma *subvariedade de* X se Y é irredutível e é fechado em X.

Exemplo. As subvariedades de $\mathbb{A}^1$ são conjuntos consistindo de um único ponto.

Proposição 1.12 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{A}^n$. Então X é irredutível se e somente se $I(X)$ é um ideal primo. Em particular X é irredutível se e somente se $\overline{X}$ é irredutível.*

Demonstração. Suponha primeiro que X é irredutível. Se $I(X)$ não é primo, então existem ideais I e J de $k[T_1, \ldots, T_n]$ tais que o produto $I \cdot J \subset I(X)$ mas I e J não estão contidos em $I(X)$. Então, pelo Lema 1.1 (d), temos

$$X \subset Z(I(X)) \subset Z(I \cdot J) = Z(I) \cup Z(J)$$

mas

$$X \subset Z(I(X)) \not\subset Z(I) \quad \text{e} \quad X \subset Z(I(X)) \not\subset Z(J),$$

contrariando a irredutibilidade de X.

Agora suponha que $I(X)$ é primo mas X não é irredutível, digamos $X = X_1 \cup X_2$ com X_1 e X_2 fechados próprios de X. Então pelo Lema 1.5,

$$I(X) = I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2) \supset I(X_1) \cdot I(X_2)$$

mas $I(X)$ não contém $I(X_1)$ nem $I(X_2)$, contradizendo o fato de $I(X)$ ser primo. □

Definição. Uma *hipersuperfície* de $\mathbb{A}^n$ é um fechado X dado por uma única equação, isto é, tal que $I(X) = \langle f \rangle$ para algum $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ não nulo.

Exemplo. 1 - $\mathbb{A}^n$ é irredutível para todo n pois o ideal $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ é primo.

2 - $W_1 = Z(T_2)$ e $W_2 = Z(T_2^2 - T_1)$ são hipersuperfícies irredutíveis de $\mathbb{A}^n$ pois os ideais $\langle T_2 \rangle$ e $\langle T_2^2 - T_1 \rangle$ são primos.

1.2 Funções regulares e morfismos

Definição. Seja X um fechado de $\mathbb{A}^n$. Uma função $f : X \to k$ é dita *regular* se existe um polinômio $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$. (Já mostramos que as funções regulares são contínuas.)

Note que o polinômio F não é unicamente determinado. De fato, dois polinômios F e G determinam a mesma função regular em X se e somente se $F(x) = G(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $F(x) - G(x) = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, se e somente se $F - G \in I(X)$. Assim o anel quociente

$$k[X] := k[T_1, \ldots, T_n]/I(X)$$

é chamado o *anel de funções regulares em* X ou *anel de coordenadas de* X. A cada função regular em X corresponde um único elemento de $k[X]$ e vice-versa. Note que $k[X]$ é Noetheriano, já que é um quociente do anel Noetheriano $k[T_1, \ldots, T_n]$. Além disso, $k[X]$ é um domínio se e somente se $I(X)$ é um ideal primo, se e somente se X é irredutível.

Exemplo. 1 - $k[\mathbb{A}^n] = k[T_1, \ldots, T_n]$ uma vez que $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$.

2 - Seja $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3 | x_1 + x_2 = x_3\}$. Então $I(X) = \langle T_1 + T_2 - T_3 \rangle$ e logo

$$\begin{array}{rcl} k[X] = \dfrac{k[T_1, T_2, T_3]}{\langle T_1 + T_2 - T_3 \rangle} & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & k[S_1, S_2] \\ T_1 & \mapsto & S_1 \\ T_2 & \mapsto & S_2 \\ T_3 & \mapsto & S_1 + S_2 \end{array}$$

Teorema 1.13 *Seja X um fechado afim. Existe bijeção revertendo inclusões*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{fechados em } X\} & \leftrightarrow & \{\textit{ideais radicais em } k[X]\} \\ Y & \mapsto & I_X(Y) := \{h \in k[X] | h(y) = 0 \, \forall y \in X\} \\ Z(J) := \{y \in X | h(y) = 0 \, \forall h \in J\} & \leftarrow & J. \end{array}$$

Além disso, para Y fechado em X temos

$$k[Y] \cong k[X]/I_X(Y)$$

e Y é irredutível se e somente se $I_X(Y)$ é ideal primo.

Demonstração. O teorema segue de propriedades de anéis quocientes. (Veja por exemplo Elementos de Álgebra de A. Garcia e Y. Lequain.) Para I ideal de um anel A, existe bijeção

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ideais em } A \text{ contendo } I\} & \leftrightarrow & \{\text{ideais em } A/I\} \\ J & \mapsto & J/I \end{array}$$

tal que

•J é radical se e somente se J/I é radical;

•J é primo se e somente se J/I é primo;

•J é maximal se e somente se J/I é maximal;

•$A/J \cong (A/I)/(J/I)$. $\square$

Corolário 1.14 *Temos bijeções*

$$\begin{array}{rcll} \{\textit{fechados irredutíveis em } X\} & \leftrightarrow & \{\textit{ideais primos em } k[X]\} & =: \mathrm{Spec}(k[X]) \\ & & \bigcup & \\ \{\textit{pontos em } X\} & \leftrightarrow & \{\textit{ideais maximais em } k[X]\} & =: \mathrm{Max}(k[X]) \end{array}$$

onde Spec($k[X]$) *é chamado o* espectro de $k[X]$ *e Max*($k[X]$) *é o* espectro maximal de $k[X]$.

Definição. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados afins. Uma função $f : X \to Y$ é dita um *morfismo* se existem $f_1, \ldots, f_m \in k[X]$ tais que

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

para todo $x \in X$. Assim, uma função regular é um morfismo $f : X \to \mathbb{A}^1$.

Exemplo. Tome $X = Z(T_1 + T_2 - T_3)$ e $Y = Z(T_1^2 - T_2^2 + T_3)$ hipersuperfícies em $\mathbb{A}^3$ (X é um plano e Y uma superfície de sela). Consideramos o morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^3 & \to & \mathbb{A}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3(x_2 - x_1)). \end{array}$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$, então $x_3 = x_1 + x_2$ e logo

$$f(x) = (x_1, x_2, (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)) = (x_1, x_2, x_2^2 - x_1^2) \in Y.$$

Deste modo, f induz um morfismo $f|_X : X \to Y$.

Proposição 1.15 *Sejam X e Y fechados afins. Dado um morfismo $f : X \to Y$, o* mapa de pullback

$$\begin{array}{rcl} f^* : k[Y] & \to & k[X] \\ g & \mapsto & g \circ f := f^* g \end{array}$$

é um homomorfismo de k-álgebras.

Reciprocamente, se $f : X \to Y$ é uma função tal que $g \circ f \in k[X]$ para todo $g \in k[Y]$, então f é morfismo.

Demonstração. Suponha $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$. Se $f : X \to Y$ é morfismo, existem $f_1, \ldots, f_m \in k[X]$ tais que $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ para todo $x \in X$. Tome $g \in k[Y]$. Então existem polinômios $F_1, \ldots, F_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$ e $G \in k[S_1, \ldots, S_m]$ tais que $f_i(x) = F_i(x)$ e $g(y) = G(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Portanto

$$(f^*g)(x) = G(F_1(x), \ldots, F_m(x))$$

é polinomial, mostrando que $f^*g \in k[X]$. Além disso, f^* é homomorfismo de k-álgebras. De fato, para $g, g' \in k[Y]$ e $a \in k$ temos

- $f^*(ag) = (ag) \circ f = a(g \circ f) = a(f^*g)$;
- $f^*(g + g') = (g + g') \circ f = (g \circ f) + (g' \circ f) = (f^*g) + (f^*g')$;
- $f^*(g \cdot g') = (g \cdot g') \circ f = (g \circ f) \cdot (g' \circ f) = (f^*g) \cdot (f^*g')$.

Agora suponha que $f : X \to Y$ é tal que $g \circ f \in k[X]$ sempre que $g \in k[Y]$. Escrevemos $f = (f_1, \ldots, f_m)$ e tomamos $g = s_i \in k[Y]$ a função regular correspondente ao polinômio $S_i \in k[S_1, \ldots, S_m]$. Então $s_i \circ f = f_i \in k[X]$ para cada $i = 1, \ldots, m$, mostrando que f é morfismo. □

Corolário 1.16 *Todo morfismo entre fechados afins é contínuo.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ um morfismo com $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados. Tome $W \subset Y$ um fechado. Precisamos mostrar que $f^{-1}(W)$ é fechado em X. Pelo Teorema 1.13, W é o conjunto de zeros de funções regulares $h_1, \ldots, h_r \in k[Y]$. Então $f^{-1}(W)$ é o conjunto dos zeros de $f^*h_1, \ldots, f^*h_r \in k[X]$, pois

$$\begin{aligned} f^{-1}(W) &= \{x \in X | f(x) \in W\} \\ &= \{x \in X | f(x) \text{ é zero de } h_1, \ldots, h_r\} \\ &= \{x \in X | (h_i \circ f)(x) = 0,\, i = 1, \ldots, r\} \\ &= \{x \in X | (f^*h_i)(x) = 0,\, i = 1, \ldots, r\}. \end{aligned}$$

Deste modo $f^{-1}(W)$ é fechado em X e f é contínua. □

Vimos então que um morfismo entre fechados afins X e Y induz um homomorfismo de k-álgebras. Vejamos agora que um homomorfismo de k-álgebras

$$\varphi : k[Y] \to k[X]$$

induz um morfismo $f : X \to Y$ tal que $f^* = \varphi$. Suponha $Y \subset \mathbb{A}^m$ e tome $s_1, \ldots, s_m \in k[Y]$ as funções regulares correspondentes aos polinômios $S_1, \ldots, S_m \in k[S_1, \ldots, S_m]$. Seja $f_i = \varphi(s_i) \in$

$k[X]$ para cada i e considere a função

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{A}^m \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)). \end{aligned}$$

É claro que f é um morfismo. Além disso, para cada $x \in X$ temos $f(x) \in Y$. De fato, para todo $H \in I(Y)$ temos $H = 0$ em $k[Y]$. Logo, $\varphi(H) = 0$ em $k[X]$ e portanto $H(f(x)) = \varphi(H)(x) = 0$, ou seja, $f(x) \in Z(I(Y)) = Y$, pois Y é fechado. É óbvio pela definição de f que $f^* = \varphi$. Esta construção indica que existe uma relação profunda entre álgebra e geometria. Esta relação ficará mais clara no Teorema 1.17.

Definição. Um *isomorfismo* é um morfismo $f : X \rightarrow Y$ tal que existe morfismo $g : Y \rightarrow X$ com $f \circ g = 1_Y$ e $g \circ f = 1_X$, onde 1_X e 1_Y são as funções identidades em X e Y. Neste caso, dizemos que X e Y são *isomorfos* e denotamos $X \cong Y$. A inversa g é denotada do modo usual f^{-1}.

Note que se $f : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo, então o mapa de pullback f^* é um isomorfismo de k-álgebras. Mais ainda, se $\varphi : k[Y] \rightarrow k[X]$ é isomorfismo de k-álgebras, então o morfismo f definido como acima é um isomorfismo.

Teorema 1.17 *Existe uma equivalência de categorias*

$$\begin{aligned} (\textit{fechados afins}) &\leftrightarrow (k\textit{-álgebras finitamente geradas sem nilpotentes}) \\ X &\mapsto k[X] \end{aligned}$$

Lembre que um elemento $a \neq 0$ de uma álgebra A é dito um *nilpotente* se $a^r = 0$ em A para algum $r \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Tome $X \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Primeiro note que $k[X]$ é finitamente gerado pois é um quociente de $k[T_1, \dots, T_n]$. Agora, se $f = \overline{F} \in k[X]$ é um nilpotente, com $F \in k[T_1, \dots, T_n]$, então para algum $r \in \mathbb{N}$, temos $f^r = 0$ em $k[X]$. Como $k[X] = k[T_1, \dots, T_n]/I(X)$, isso significa que $F^r \in (X)$. Mas $I(X)$ é ideal radical pelo Teorema 1.7 e logo $F \in I(X)$, implicando que $f = 0$. Assim $k[X]$ não tem nilpotentes.

Precisamos agora associar a uma k-álgebra A, gerada por n elementos e sem nilpotentes, um fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$. Sejam $t_1, \dots, t_n \in A$ geradores de A. Então A pode ser visto como um quociente

$$A \cong k[T_1, \dots, T_n]/J$$

com $J \subset k[T_1, \dots, T_n]$ um ideal, onde T_i é levado em t_i pelo mapa quociente. Seja $X = Z(J) \subset \mathbb{A}^n$ o fechado definido por J. Queremos mostrar que $I(X) = J$ e logo $k[X] \cong A$. Pelo Teorema 1.7, temos $I(X) = \sqrt{J} \supset J$. Tome $F \in I(X)$, então $F^r \in J$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Logo

$$(F + J)^r = F^r + J = J$$

é nulo em A. Como A não tem nilpotentes, temos que ter $F + J$ nulo em A, isto é, $F \in J$. Logo $J = I(X)$.

Por último, lembre que já mostramos que um mofismo f entre fechados afins X e Y corresponde a um homomorfismo f^* entre as k-álgebras $k[Y]$ e $k[X]$ e vice-versa, nos dando então a equivalência de categorias. $\square$

Exemplo. 1 - Seja $X = Z(T_1T_2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. O morfismo de projeção

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

não é um isomorfismo, pois $0 \in \mathbb{A}^1$ não possui inversa. Note que

$$\begin{array}{rcl} k[X] = \dfrac{k[T_1, T_2]}{\langle T_1T_2 - 1\rangle} & \xrightarrow{\sim} & k[T, T^{-1}] \\ T_1 & \mapsto & T \\ T_2 & \mapsto & T^{-1} \end{array}$$

não é isomorfa a $k[\mathbb{A}^1] = k[T]$.

2 - Seja $X = Z(T_1^3 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^2$. Então o morfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\rightarrow X \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

é uma bijeção com inversa dada por

$$\begin{aligned} f^{-1} : X &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2/x_1, \text{ se } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ (0, 0) &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Como f^{-1} não é morfismo, então f não é isomorfismo. Note que f^{-1} é uma função contínua (verifique!) e portanto f é um exemplo de um homeomorfismo (i.e., uma função contínua com inversa contínua) que não é um isomorfismo.

3 - Sejam $X = Z(T_1 + T_2 - T_3)$ e $Y = Z(T_1^2 - T_2^2 + T_3)$ hipersuperfícies em $\mathbb{A}^3$. Vimos que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_2, x_3(x_2 - x_1)). \end{aligned}$$

é um morfismo induzindo um morfismo $f|_X : X \to Y$. Vejamos que $f|_X$ é isomorfismo.

Considere a função

$$\begin{array}{rcl} g : U & \to & \mathbb{A}^3 \\ (y_1, y_2, y_3) & \mapsto & \left(y_1, y_2, \dfrac{y_3}{y_2 - y_1} \right). \end{array}$$

definida no aberto U de $\mathbb{A}^3$ dos pontos (y_1, y_2, y_3) tais que $y_1 \neq y_2$. É fácil ver que as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ são identidade nos pontos onde estão bem definidas.

Note que Y não está contido em U. Porém, se $(y_1, y_2, y_3) \in Y$, então

$$y_3 = y_2^2 - y_1^2 = (y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$$

e portanto

$$\frac{y_3}{y_2 - y_1} = y_2 + y_1.$$

Assim podemos considerar g nos pontos de Y e

$$\begin{array}{rcl} g|_Y : Y & \to & X \\ (y_1, y_2, y_3) & \mapsto & (y_1, y_2, y_2 + y_1). \end{array}$$

é um morfismo que é a inversa de $f|_X$. Deste modo $f|_X$ é isomorfismo e $X \cong Y$. Note que f não é isomorfismo.

1.3 Funções racionais e mapas racionais

Na Geometria Algébrica existem "poucos" isomorfismos e logo muitas classes de isomorfismos. Assim, problemas de classificação a menos de isomorfismo são em geral problemas difíceis. (Uma excessão é a classificação de curvas.) Uma solução possível é utilizar uma classificação menos fina, isto é, uma equivalência mais fraca que o isomorfismo.

Definição. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. O *corpo de funções racionais de* X é o corpo de frações de $k[X]$, que é

$$k(X) := \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f, g \in k[X],\ g \neq 0 \right\} / \sim$$

onde $f/g \sim f'/g'$ se $fg' = f'g$.

Uma função racional $\varphi \in k(X)$ é dita *regular* em um ponto $x \in X$ se podemos escrever $\varphi = f/g$ com $f, g \in k[X]$ e $g(x) \neq 0$.

Proposição 1.18 *Seja X uma variedade afim. Uma função racional que é regular em todos os pontos de X é uma função regular.*

Demonstração. Tome $\varphi \in k(X)$ função racional que é regular em todo ponto de X. Então para cada $x \in X$ podemos escrever $\varphi = f_x/g_x$ com $f_x, g_x \in k[X]$ e $g_x(x) \neq 0$. Seja $J = \langle g_x \,|x \in X\rangle$ o ideal gerado pelos denominadores das representações de φ acima. Pelo Teorema 1.3 $k[X]$ é Noetheriano e logo existem $x_1, \dots, x_r \in X$ tais que $J = \langle g_{x_1}, \dots, g_{x_r}\rangle$. Agora, se $g_{x_1}, \dots, g_{x_r}$ tivessem zero comum em um $x \in X$, então toda função de J se anularia em x. Em particular, g_x se anularia em x o que não ocorre. Assim $Z(J) = \emptyset$ e, pelo Teorema 1.9, temos $J = k[X]$. Desse modo, temos $1 \in J$ e existem $h_1, \dots, h_r \in k[X]$ tais que $\sum_{i=1}^r h_i g_{x_i} = 1$. Portanto

$$\varphi = (\sum_{i=1}^r h_i g_{x_i})\varphi = \sum_{i=1}^r h_i(g_{x_i}\varphi) = \sum_{i=1}^r h_i f_{x_i} \in k[X],$$

isto é, φ é função regular. $\square$

Lema 1.19 *Seja X uma variedade afim e $\varphi \in k(X)$. O conjunto U_φ dos pontos de X onde φ é regular é um aberto denso de X. Dizemos que U_φ é o* domínio de definição *de φ.*

Demonstração. Escrevendo $\varphi = f_i/g_i$ com $f_i, g_i \in k[X]$, vemos que $x \in U_\varphi$ sempre que $g_i(x) \neq 0$ para algum i. Assim, como g_i é não nulo, temos $U_\varphi \neq \emptyset$. Agora seja $Y_i = Z(g_i)$. Pelo Teorema 1.13, Y_i é fechado em X e logo $U_i = X - Y_i$ é aberto em X. Temos então que $U_\varphi = \cup_i U_i$ é aberto não vazio em X e, como X é irredutível, U_φ é denso em X. $\square$

O lema diz que uma função racional φ em uma variedade afim X define um mapa $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{A}^1$ onde U_φ é aberto denso de X.

Lema 1.20 *Seja X variedade afim e tome $\varphi, \psi \in k(X)$ duas funções racionais em X. Suponha que para todo ponto $x \in U_\varphi \cap U_\psi$ temos $\varphi(x) = \psi(x)$. Então $\psi = \varphi$.*

Demonstração. Por hipótese, para toda representação $\varphi = f/g$ e $\psi = f'/g'$ e todo $x \in U := U_\varphi \cap U_\psi$ temos

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f'}{g'}(x),$$

ou seja, $f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$. Agora considere a função regular $h := fg' - f'g$. Basta então mostrar que $h = 0$ em $k[X]$.

Temos $h(x) = 0$ para todo x no aberto denso U de X. Ora, $h : X \to \mathbb{A}^1$ é uma função contínua e logo $f^{-1}(0)$ é um fechado em X, já que $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{A}^1$. Mas $f^{-1}(0)$ contém o aberto denso U de X e logo deve conter $\overline{U} = X$. $\square$

Obs. 1 - Na prova do lema anterior mostramos que se X é um fechado afim e $h, h' \in k[X]$ são funções regulares tais que $h(x) = h'(x)$ para todo x em um aberto denso de X, então $h = h'$.

2 - O lema nos dá uma definição alternativa de função racional. Temos que

$$k(X) = \{(U, \varphi) \,|\, U \subset X \text{ aberto denso, } \varphi \in k[U]\}/\sim$$

onde $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$ se $\varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$.

Agora tome $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ funções racionais em uma variedade afim X. Seja $U = \bigcap_{i=1}^m U_{\varphi_i}$ aberto denso em X. As funções $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ estão bem definidas em U e logo definem um mapa $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : U \to \mathbb{A}^m$. Dizemos que φ é um *mapa racional* de X em $\mathbb{A}^m$ e denotamos por $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{A}^m$. O aberto U é o *domínio de definição* de φ. Se $Y \subset \mathbb{A}^m$ é tal que $\varphi(x) \in Y$ para todo $x \in U$, então podemos escrever $\varphi : X \dashrightarrow Y$ e, neste caso, dizemos que φ é um mapa racional de X em Y. A *imagem* de φ é definida por $\varphi(X) := \varphi(U)$.

Proposição 1.21 *Sejam X e Y variedades afins e seja $\varphi : X \dashrightarrow Y$ um mapa racional. Suponha que $\varphi(X)$ é denso em Y.*

(a) Se $\psi : Y \dashrightarrow Z$ é um mapa racional com Z variedade afim, então a composição $\varphi \circ \psi$ é um mapa racional de X em Z.

(b) O mapa φ induz um homomorfismo injetor de corpos

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : k(Y) & \to & k(X) \\ g & \mapsto & g \circ \varphi =: \varphi^*(g). \end{array}$$

Demonstração. (a) Basta notar que a composição de frações de polinômios é ainda uma fração de polinômios. Note ainda que, como $\varphi(X)$ e o domínio de definição V de ψ são ambos densos em Y, então $\varphi^{-1}(V)$ é ainda um aberto denso de X e é o aberto de definição da composição $\varphi \circ \psi$.

(b) Pelo item (a) com $Z = \mathbb{A}^1$, temos $\varphi^*(g) \in k(X)$ para todo $g \in k(Y)$. Como na Proposição 1.15, vemos que φ^* é homomorfismo de corpos e, portanto, injetor. $\square$

Obs. Do mesmo modo que para morfismos, um homomorfismo de corpos $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ induz um mapa racional $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : X \dashrightarrow Y$ onde $Y \subset \mathbb{A}^m$ e $\varphi_i = \varphi^*(s_i)$ onde $s_i \in k[Y]$ é a imagem de S_i no quociente $k[S_1, \ldots, S_m]/I(Y)$.

Definição. Um *mapa birracional* entre variedades afins X e Y é um mapa racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ com $\varphi(X)$ denso em Y e tal que existe mapa racional $\psi : Y \dashrightarrow X$ de modo que $\varphi \circ \psi$ e $\psi \circ \varphi$ são identidades onde estão definidas. Dizemos que X e Y são *birracionalmente equivalentes* ou apenas *birracionais.*

Note que neste caso φ^* é isomorfismo de corpos pois tanto φ^* quanto sua inversa ψ^* são injetoras. Reciprocamente, se φ^* é isomorfismo então φ é birracional.

Obs. Se X e Y são variedades afins, então

$$\begin{aligned} X \text{ isomorfo a } Y &\Leftrightarrow k[X] \text{ isomorfo a } k[Y]; \\ X \text{ birracional a } Y &\Leftrightarrow k(X) \text{ isomorfo a } k(Y). \end{aligned}$$

Exemplo. 1 - Seja $X = Z(T_1T_2 - 1)$ variedade em $\mathbb{A}^2$. Já vimos que a projeção

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

não é um isomorfismo. Porém f é mapa birracional. De fato, f tem uma inversa racional

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{A}^1 &\dashrightarrow X \\ t &\mapsto (t, 1/t) \end{aligned}$$

definida em $\mathbb{A}^1 - \{0\}$. Vimos que $k[X] \cong k[T, T^{-1}]$ e logo $k(X) \cong k(T)$ que é $k(\mathbb{A}^1)$.

2 - Seja $X = Z(T_1^3 - T_2^2)$ variedade em $\mathbb{A}^2$. O morfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to X \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

é birracional com inversa dada por

$$\begin{aligned} f^{-1} : X &\to \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2/x_1 \end{aligned}$$

definida em $X - \{(0, 0)\}$.

3 - Toda variedade afim é birracional a uma hipersuperfície irredutível em $\mathbb{A}^m$ para algum m. De fato, seja X uma variedade afim. Note que $k(X)$ é uma extensão de k. Seja $m - 1$ o grau de transcendência da extensão $k(X)|k$. Temos então que (cf. Shafarevich apêndice 5) $k(X) \cong k(s_1, \ldots, s_m)$ com $s_1, \ldots, s_{m-1}$ algebricamente independentes sobre k e $F(s_1, \ldots, s_m) = 0$ para algum $F \in k[T_1, \ldots, T_m]$ irredutível com derivada F_{T_m} não-nula. Tome $Y = Z(F) \subset \mathbb{A}^m$ hipersuperfície irredutível. Então

$$k[Y] = k[T_1, \ldots, T_m]/\langle F \rangle = k[s_1, \ldots, s_m]$$

implicando que

$$k(Y) = k(s_1, \ldots, s_m) \cong k(X).$$

Logo X é birracional a Y.

Os exemplos ilustram o fato de que a condição de duas variedades serem birracionais é realmente mais fraca que a de serem isomorfas. Desse modo, a classificação de variedades a menos de equivalência birracional é um problema mais simples que a classificação a menos de isomorfismo. Um fato talvez surpreendente é que este problema seja relevante, ou melhor, que a classe de variedades a menos de equivalência birracional ainda guarde informação relevante sobre a variedade. Falaremos mais sobre birracionalidade na Seção 2.4.

2 Variedades quasi-projetivas

2.1 Topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$

A idéia básica da geometria projetiva é acrescentar pontos no infinito, de modo que, por exemplo, quaisquer duas retas no plano se intersectem. É claro que isso não ocorre no plano afim. Para construir o plano projetivo, identificamos o plano afim $\mathbb{A}^2$ com o plano

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in k^3 | x_0 = 1\}$$

do espaço afim k^3. Cada ponto $(1, x_1, x_2)$ deste plano determina uma reta passando pela origem, a saber a reta $\{(\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2) | \lambda \in k\}$. As retas em k^3 passando pela origem que não intersectam o plano "$x_0 = 1$" são as retas do plano "$x_0 = 0$". Intuitivamente, uma tal reta encontra o plano "$x_0 = 1$" no infinito. Usamos estas retas então para definir os pontos no infinito.

Assim, o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ é tal que existe bijeção

$$\{\text{pontos de } \mathbb{P}^2\} \leftrightarrow \{\text{retas em } k^3 \text{ passando pela origem}\}.$$

Uma tal reta é da forma $\{(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) | \lambda \in k\}$, onde $(x_0, x_1, x_2) \in k^3$ não é a origem. Note que dois vetores (x_0, x_1, x_2) e (y_0, y_1, y_2) definem a mesma reta pela origem se e somente se

$$(y_0, y_1, y_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$$

para algum $\lambda \in k$. Denotamos o ponto correspondente em $\mathbb{P}^2$ por $(x_0 : x_1 : x_2)$. Analogamente, o espaço projetivo de dimensão n é denotado por $\mathbb{P}^n$ e tem pontos que correspondem a retas em k^{n+1} passando pela origem.

Definição. O *espaço projetivo de dimensão n* é dado por

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_k := k^{n+1}/\sim$$

onde

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_i = \lambda y_i,\ \forall i = 1, \ldots, n \text{ para algum } \lambda \in k^*.$$

O ponto de $\mathbb{P}^n$ correspondente a $(x_0, \ldots, x_n)$ é denotado por $(x_0 : \ldots : x_n)$ e dizemos que $x_0, \ldots, x_n$ são as *coordenadas homogêneas* ou *coordenadas projetivas* do ponto.

Usualmente, chamamos de *pontos finitos* aos pontos do conjunto

$$\{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_0 \neq 0\} = \{(1 : x_1 : \ldots : x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n\}$$

e chamamos de *pontos infinitos* aos pontos do conjunto

$$\{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_0 = 0\} = \{(0 : x_1 : \ldots : x_n) | (x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}\}.$$

Note que o conjunto dos pontos finitos de $\mathbb{P}^n$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^n$ e o conjunto dos pontos infinitos pode ser identificado com $\mathbb{P}^{n-1}$.

Em particular, temos

$$\mathbb{P}^1 = \text{reta afim dos pontos finitos} \cup \{(0 : 1)\},$$

e assim $\mathbb{P}^1$ tem um único ponto infinito. E temos

$$\mathbb{P}^2 = \text{plano afim dos pontos finitos} \cup \text{reta projetiva dos pontos infinitos}.$$

O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ também é imbuído de uma topologia de Zariski dada por polinômios. Tome $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$. Não faz sentido falar do valor de F em um ponto $(x_0 : \ldots : x_n)$ pois este valor em geral depende da escolha de coordenadas projetivas, isto é, $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ em geral depende de λ. Dizemos que F *se anula* em $(x_0 : \ldots : x_n)$ se $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda \in k^*$. Se F se anula em um ponto $x \in \mathbb{P}^n$, por vezes escrevemos $F(x) = 0$.

Lembre que um polinômio $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ é dito *homogêneo de grau* r se

$$F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r F(x_0, \ldots, x_n)$$

para todo $\lambda \in k$. Os polinômios homogêneos de grau r são então da forma

$$F = \sum_{r_0 + \ldots + r_n = r} c_{r_0, \ldots, r_n} T_0^{r_0} \cdots T_n^{r_n}.$$

Assim todo polinômio $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ se escreve como uma soma $F = F_0 + \ldots + F_d$ onde $F_i \in k[T_0, \ldots, T_n]$ é um polinômio homogêneo de grau i. Dizemos que $F_0, \ldots, F_d$ são as *componentes homogêneas* de F. Agora suponha que F se anula em um ponto $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$. Então para todo $\lambda \in k$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \\ &= F_0(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) + F_1(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) + \ldots + F_d(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \\ &= F_0(x_0, \ldots, x_n) + \lambda F_1(x_0, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda^d F_d(x_0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Fazendo $a_i := F_i(x_0, \ldots, x_n)$, vemos que todo $\lambda \in k$ é raiz do polinômio $a_0 + Ta_1 + \ldots + T^d a_d$. Como k é infinito (por ser algebricamente fechado) o polinômio deve ser identicamente nulo, ou seja, temos que ter $F_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$ para todo $i = 0, \ldots, d$.

Definição. Seja $S \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ um subconjunto. O *conjunto de zeros* de S é

$$Z_p(S) := \{x \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0 \text{ para todo } F \in S\}.$$

Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é dito *fechado* se $X = Z(S)$ para algum S. Um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ é *aberto* se seu complementar é fechado. Os abertos (resp. fechados) de $\mathbb{P}^n$ são também chamados *abertos projetivos* (resp. *fechados projetivos* ou *conjuntos algébricos projetivos*).

Para $X \subset \mathbb{P}^n$ um subconjunto, definimos o *ideal* de X por

$$I_p(X) := \{F \in k[T_0, \ldots, T_n] \mid F(x) = 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

Note que o ideal $I_p(X)$ é um ideal *homogêneo*, isto é um polinômio F está em $I_p(X)$ se e somente se todas as componentes homogêneas de F estão em $I_p(X)$.

Obs. 1 - Os abertos em $\mathbb{P}^n$ formam uma topologia chamada *topologia de Zariski de* $\mathbb{P}^n$. De fato, as afirmações (b), (c) e (d) do Lema 1.1 continuam válidas para $\mathbb{P}^n$. A topologia de Zariski de $\mathbb{P}^n$ se estende a subconjuntos $X \subset \mathbb{P}^n$ tomando-se interseções. Os *fechados* (resp. *abertos*) de X são então interseções de X com fechados (resp. abertos) de $\mathbb{P}^n$.

2 - Pelo Teorema 1.3, o anel $k[T_0, \ldots, T_n]$ é Noetheriano e, como para cada $X \subset \mathbb{P}^n$ o ideal $I_p(X)$ é homogêneo, podemos escrever

$$I_p(X) = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$$

com $F_1, \ldots, F_k$ polinômios homogêneos.

3 - Da mesma forma que na Proposição 1.11, mostra-se que todo $X \subset \mathbb{P}^n$ se escreve de modo único como

$$X = W_1 \cup \cdots \cup W_k$$

com $W_1, \ldots, W_k$ fechados irredutíveis em X tais que $W_i \not\subset W_j$ se $i \neq j$. Novamente, diremos que $W_1, \ldots, W_k$ são as *componentes irredutíveis* de X. Um fechado projetivo irredutível é dito uma *variedade projetiva*.

Existe uma diferença básica entre os casos afim e projetivo. Considere o ideal $I = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$. Então $Z_p(I) = \emptyset$ já que, se os polinômios de I se anulassem em um ponto $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, teríamos que ter $x_0 = \cdots = x_n = 0$.

Teorema 2.1 (Teorema projetivo dos zeros) *Existe bijeção revertendo inclusões*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{fechados em } \mathbb{P}^n\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{ideais radicais homogêneos em} \\ k[T_0, \ldots, T_n] \textit{ diferentes de } \langle T_0, \ldots, T_n \rangle \end{array} \right\} \\ X & \mapsto & I_p(X) \\ Z_p(J) & \leftarrow & J \end{array}$$

Antes de mostrar o teorema, precisamos relembrar uma definição. Um subconjunto C de k^{n+1} é dito um *cone* se $\lambda \cdot c \in C$ para todo $c \in C$ e $\lambda \in k$. Note que $0 := \{(0, \ldots, 0)\}$ é um cone chamado o *cone nulo*.

Demonstração. Considere a projeção natural

$$\begin{array}{rcl} \pi : k^{n+1} - 0 & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_0 : \ldots : x_n). \end{array}$$

Existe bijeção monótona

$$\begin{array}{rcl} \{\text{subconjuntos em } \mathbb{P}^n\} & \leftrightarrow & \{\text{cones não nulos em } k^{n+1}\} \\ X & \mapsto & \pi^{-1}(X) \cup 0 \\ \pi(C - 0) & \leftarrow & C. \end{array}$$

Agora, um fechado C em k^{n+1} é um cone se e somente se é o conjunto de zeros de uma família de polinômios homogêneos. Assim, temos bijeção

$$\{\text{fechados em } \mathbb{P}^n\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{cones fechados} \\ \text{não nulos em } k^{n+1} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ideais radicais homogêneos em} \\ k[T_0, \ldots, T_n] \text{ distintos de } \langle T_0, \ldots, T_n \rangle \end{array} \right\}$$

□

Corolário 2.2 (Teorema fraco projetivo dos zeros) *Seja $J \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ um ideal homogêneo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $Z_p(J) = \emptyset$;

(ii) $\sqrt{J} = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle$ ou $\sqrt{J} = k[T_0, \ldots, T_n]$;

(iii) $T_0^r, \ldots, T_n^r \in J$ para algum $r \geq 0$;

(iv) existe $d \geq 0$ tal que todo polinômio homogêneo de grau d está contido em J.

Exemplo.(Variedades determinantais) Considere o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ a menos de multiplicação por escalar. Este conjunto é identificado com $\mathbb{P}^{mn-1}$. Denote por $x_M \in \mathbb{P}^{mn-1}$ o ponto associado à matriz M. Para $k \geq 0$ definimos

$$X_k := \{x_M \in \mathbb{P}^{mn-1} |\, \mathrm{rk}(M) \leq k\},$$

onde $\mathrm{rk}(M)$ é o posto da matriz M. Como o posto é invariante por multiplicação por escalar não nulo, então X_k está bem definido. Vamos mostrar que X_k é fechado em $\mathbb{P}^{mn-1}$.

Lembre que, por definição, uma matriz M tem posto k se o determinante de seus menores de ordem $(k+1)\times(k+1)$ são nulos e existe menor de ordem $k \times k$ com determinante não nulo. Assim, $x_M \in X_k$ se e somente se todos os menores de ordem $(k+1)\times(k+1)$ de M se anulam. Ora, esta condição é polinomial em x_M (pois o determinante é um polinômio nas entradas da matriz) e logo X_k é fechado em $\mathbb{P}^{mn-1}$. É possível mostrar que X_k é irredutível com dimensão $(m-k)(n-k)$.

O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ tem uma cobertura por abertos afins. De fato, os conjuntos

$$\mathbb{A}_i^n := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_i \neq 0\} = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_i = 1\}$$

são abertos em $\mathbb{P}^n$ e podem ser identificados com $\mathbb{A}^n$. Além disso, é óbvio que

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{A}_i^n.$$

Deste modo, se Y é um subconjunto de $\mathbb{A}^n$, geralmente consideramos Y como subconjunto de $\mathbb{P}^n$ identificando $\mathbb{A}^n$ com $\mathbb{A}_0^n$.

Seja $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ um polinômio homogêneo. A *desomogenização* de F é o polinômio $f = F(1, T_1, \ldots, T_n) \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Reciprocamente, tome $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$ e escreva $f = f_0 + \ldots + f_d$ com f_i homogêneo de grau i. Então a *homogenização* de f é o polinômio homogêneo de grau d

$$F = \sum_{i=0}^{d} f_i T_0^{d-i} \in k[T_0, \ldots, T_n].$$

Agora tome $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado. Identificando $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_0^n$, consideramos o conjunto dos pontos finitos de X, isto é, a interseção $X \cap \mathbb{A}^n$. O ideal de $X \cap \mathbb{A}^n$ é o ideal gerado pelas desomogenizações de todos os polinômios de $I_p(X)$. Reciprocamente, tome $Y \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Seja J o ideal de $k[T_0, \ldots, T_n]$ gerado pelas homogenizações de todos os polinômios de $I(Y)$. O *fecho projetivo* de Y é o fechado $\overline{Y} = Z_p(J)$. Note que o conjunto dos pontos finitos de $\overline{Y}$ é o próprio Y, visto como subconjunto de $\mathbb{P}^n$.

Obs. 1 - Se Y é uma hipersuperfície de $\mathbb{A}^n$, isto é $I(Y) = \langle f \rangle$ com $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$, então o fecho projetivo de Y é $\overline{Y} = Z_p(F)$ onde F é a homogenização de f.

2 - O fecho projetivo de $Y \subset \mathbb{A}^n$ é de fato o fecho de Y em $\mathbb{P}^n$. Mais geralmente, é possível mostrar de modo análogo à Proposição 1.6 que se $X \subset \mathbb{P}^n$ então o fecho de X é $\overline{X} = Z_p(I_p(X))$.

Exemplo. 1 - Tome $Y = Z(T_2^2 - T_1^3) \subset \mathbb{A}^2$ a curva cuspidal. A homogenização de $f = T_2^2 - T_1^3$ é $F = T_0T_2^2 - T_1^3$ e logo $\overline{Y} = Z_p(T_0T_2^2 - T_1^3)$. Os pontos infinitos de $\overline{Y}$ são

$$\begin{aligned}
\overline{Y} \cap Z_p(T_0) &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0x_2^2 = x_1^3,\, x_0 = 0\} \\
&= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_0 = 0,\, x_1 = 0\} \\
&= \{(0 : 0 : x_2) | x_2 \in k\} = \{(0 : 0 : 1)\}.
\end{aligned}$$

2 - Considere a hipersuperfície $Y = Z(T_3 + T_1^2 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^3$. A homogenização de $f = T_3 + T_1^2 - T_2^2$ é $F = T_0T_3 + T_1^2 - T_2^2$ e logo $\overline{Y} = Z_p(T_0T_3 + T_1^2 - T_2^2)$. Os pontos infinitos de $\overline{Y}$ são

$$\begin{aligned}
\overline{Y} \cap Z_p(T_0) &= \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \,|\, x_0x_3 = x_2^2 - x_1^2,\, x_0 = 0\} \\
&= \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \,|\, x_0 = 0,\, x_1^2 = x_2^2\} \\
&= \{(0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \,|\, x_2 = \pm x_1\} \\
&= \{(0 : s : s : t) \,|\, s, t \in k\} \cup \{(0 : s : -s : t) \,|\, s, t \in k\}.
\end{aligned}$$

Os pontos infinitos de X formam um par de retas em $\mathbb{P}^3$, ou seja, cada um dos conjuntos acima é isomorfo a $\mathbb{P}^1$. (Veja a Seção 1.2.)

Definição. Um *conjunto algébrico quasi-projetivo* é um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ satisfazendo as seguintes condições equivalentes:

(i) X é a interseção de um aberto e um fechado de $\mathbb{P}^n$;

(ii) X é um subconjunto fechado de um aberto de $\mathbb{P}^n$;

(iii) X é um subconjunto aberto de um fechado de $\mathbb{P}^n$;

(iv) X é um subconjunto aberto de seu fecho.

Uma *variedade quasi-projetiva* é um conjunto algébrico quasi-projetivo irredutível.

Exemplo. 1 - Todo fechado projetivo é conjunto algébrico quasi-projetivo.

2 - Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um fechado afim. Identificando $\mathbb{A}^n$ com $\mathbb{A}_0^n$ temos $X \subset \mathbb{P}^n$. Note que $X = \overline{X} \cap \mathbb{A}_0^n$. Assim, como $\overline{X}$ é fechado em $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{A}_0^n$ é aberto em $\mathbb{P}^n$, temos que X é conjunto algébrico quasi-projetivo.

3 - Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo e Y um aberto (resp. fechado) de X. Então Y é um conjunto algébrico quasi-projetivo. De fato, podemos escrever $X = X_1 \cap X_2$ com X_1 fechado e X_2 aberto em $\mathbb{P}^n$ para algum n. Como Y é aberto (resp. fechado) em X, temos $Y = Y_1 \cap X$ com

Y_1 aberto (resp. fechado) em $\mathbb{P}^n$. Deste modo, temos

$$Y = X_1 \cap (X_2 \cap Y_1) \quad (\text{resp. } Y = (X_1 \cap Y_1) \cap X_2)$$

e como X_1 é fechado e $X_2 \cap Y_1$ é aberto em $\mathbb{P}^n$ (resp. $X_1 \cap Y_1$ é fechado e X_2 é aberto em $\mathbb{P}^n$), então Y é um conjunto algébrico quasi-projetivo.

Queremos estender os conceitos de funções regulares e racionais, morfismos e mapas racionais a conjuntos algébricos quasi-projetivos.

2.2 Funções regulares e morfismos

Um polinômio $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ não pode ser visto como função em $\mathbb{P}^n$ já que, em geral, para $\lambda \in k$ temos $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \neq F(x_0, \ldots, x_n)$. Além disso, um quociente $f = P/Q$ com $P, Q \in k[T_0, \ldots, T_n]$ só pode ser visto como função em $\mathbb{P}^n$ se P e Q são homogêneos do mesmo grau.

Tome $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto algébrico quasi-projetivo e tome $f = P/Q$ com $P, Q \in k[T_0, \ldots, T_n]$ homogênos de mesmo grau. Dizemos que f é *regular* em um ponto $x \in X$ se f está bem definido em x, isto é, se $Q(x) \neq 0$. A função f é dita *regular em* X se é regular em cada ponto de X. As funções regulares em X formam uma k-álgebra denotada $k[X]$. De fato, se $a \in k$ e $f, g \in k[X]$, então é fácil ver que af, $f + g$ e fg estão ainda em $k[X]$. Dizemos que $k[X]$ é o *anel das funções regulares* de X.

Obs. 1 - Se uma função f é regular em um ponto x então, por continuidade, f é regular em uma vizinhança U de x. Assim, f define uma função $U \to k$.

2 - Se $Y \subset X$ então $k[X] \subset k[Y]$.

3 - Seja X um fechado afim, digamos $X \subset \mathbb{A}^n$. Considere $X \subset \mathbb{P}^n$ do modo usual e tome $f = P/Q$ uma função regular em X, com $P, Q \in k[T_0, \ldots, T_n]$ homogêneos de mesmo grau. Sejam $p, q \in k[T_1, \ldots, T_n]$ as desomogenizações de P, Q. Como $X \subset \mathbb{A}^n_0$, para cada $x \in X$ temos

$$f(x) = \frac{P}{Q}(x) = \frac{p}{q}(x).$$

Assim f é uma função racional no fechado afim X que é regular em todos os pontos de X. Pela Proposição 1.18, temos que f é regular no sentido definido anteriormente.

Exemplo. $k[\mathbb{P}^n] = k$. De fato, tome $f = P/Q$ regular em $\mathbb{P}^n$. Suponha que P, Q não têm fator comum não-constante. Se o grau de Q fosse diferente de zero, então Q teria alguma raiz, isto é, existiria $x \in \mathbb{P}^n$ tal que $Q(x) = 0$ e logo f não seria regular em x. Assim o grau de Q, e logo o grau de F, é zero, ou seja, $f = P/Q$ é constante.

Veremos mais adiante (Corolário 2.16) que $k[X] = k$ para todo fechado projetivo X. Por outro lado, é fácil mostrar que se X é fechado afim então $k[X] = k$ se e somente se X consiste de um único ponto. Mais ainda, lembre que $k[X]$ é sempre finitamente gerado como k-álgebra se X é fechado afim, mas existem exemplos de conjuntos algébricos quasi-projetivos cujos anéis de funções regulares não são finitamente gerados.

Definição. Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Uma função $f : X \to Y$ é um *morfismo* se para todo aberto $V \subset Y$ e toda função regular $g \in k[V]$ temos

(i) $f^{-1}(V)$ é aberto em X (isto é, f é contínua);

(ii) $g \circ f$ é uma função regular em $f^{-1}(V)$.

Obs. 1 - Pela Proposição 1.15 e seu corolário, se $f : X \to Y$ é um morfismo entre fechados afins como definido anteriormente, então f é um morfismo pela nova definição.

2 - Um morfismo $f : X \to Y$ entre conjuntos algébricos quasi-projetivos induz um *mapa de pullback*

$$\begin{array}{rcl} f^* : k[Y] & \to & k[X] \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Proposição 2.3 *Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos com $Y \subset \mathbb{P}^m$. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua tal que, para cada $x \in X$ existe aberto $V \subset Y$ contendo $f(x)$ e funções regulares $f_0, \ldots, f_m \in k[f^{-1}(V)]$ tais que, para cada $x' \in f^{-1}(V)$, temos*

$$f(x') = (f_0(x') : \ldots : f_m(x')).$$

Então f é um morfismo.

Demonstração. Precisamos apenas verificar a condição (ii) da definição. Tome $g \in k[V]$, então $g = (P/Q)|_V$ com $P, Q \in k[T_0, \ldots, T_m]$. Suponha $X \subset \mathbb{P}^n$. Como $f_i \in k[f^{-1}(V)]$, temos $f_i = (R_i/S_i)|_{f^{-1}(V)}$ com $R_i, S_i \in k[T_0, \ldots, T_n]$. Assim para cada $x' \in f^{-1}(V)$ temos

$$(g \circ f)(x') = \frac{P\left(\frac{R_0(x)}{S_0(x)}, \ldots, \frac{R_m(x)}{S_m(x)}\right)}{Q\left(\frac{R_0(x)}{S_0(x)}, \ldots, \frac{R_m(x)}{S_m(x)}\right)} = \frac{P(y')}{Q(y')}$$

onde $y' = f(x') \in V$. Assim $Q(y') \neq 0$ e, como composição de frações de polinômios é fração de polinômios, temos $g \circ f$ regular em $f^{-1}(V)$. $\square$

Teorema 2.4 *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos com $Y \subset \mathbb{P}^n$. Então para cada $x \in X$ existe aberto U de X contendo x tal que para todo $x' \in U$ temos*

$$f(x') = (f_0(x') : \ldots : f_m(x'))$$

com $f_0, \ldots, f_m \in k[U]$.

Demonstração. Tome $x \in X$. Então $f(x) \in \mathbb{A}_i^m$ para algum $i = 0, \ldots, m$. Suponha sem perda de generalidade que $f(x) \in \mathbb{A}_0^m$ e tome $V = Y \cap \mathbb{A}_0^m$ aberto em Y contendo $f(x)$. As funções

$$\frac{T_1}{T_0}, \ldots, \frac{T_m}{T_0}$$

são regulares em V. Como f é contínua, então $U = f^{-1}(V)$ é aberto em X contendo x. Para cada $i = 1, \ldots, m$ temos

$$s_i := \frac{T_i}{T_0} \circ f \in k[U].$$

Então para cada $x' \in U$ temos

$$f(x') = (1 : s_1(x') : \ldots : s_m(x')).$$

De fato, se $f(x') = (y_0 : \ldots : y_m)$, como $f(x') \in V \subset \mathbb{A}_0^m$, temos

$$\begin{aligned} f(x') &= \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : \ldots : \frac{y_m}{y_0}\right) \\ &= \left(1 : \frac{T_1}{T_0} \circ f(x') : \ldots : \frac{T_m}{T_0} \circ f(x')\right) \\ &= (1 : s_1(x') : \ldots : s_m(x')). \end{aligned}$$

$\square$

Obs. Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo. Tome $F_0, \ldots, F_m \in k[T_0, \ldots, T_n]$ homogêneos de mesmo grau sem zeros em comum em X. Então

$$\begin{aligned} f = (F_0 : \ldots : F_m) : X &\to \mathbb{P}^m \\ x &\mapsto (F_0(x) : \ldots : F_m(x)) \end{aligned}$$

é um morfismo. De fato, é fácil mostrar que f é contínua e leva funções regulares em funções regulares.

Definição. Sejam X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos. Um *isomorfismo*, $\cong$ entre X e Y é um morfismo $f : X \to Y$ tal que existe um morfismo $g : X \to Y$ de modo que as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ são identidade em X e Y. Dizemos neste caso que X e Y são *isomorfos*.

Um conjunto algébrico quasi-projetivo é dito *afim* se for isomorfo a um fechado afim. Em particular todo fechado afim é um conjunto algébrico afim. Porém nem todo conjunto algébrico afim é um fechado afim. Por exemplo, $X = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ é isomorfo ao fechado afim $Y = Z(T_1T_2 - 1)$. De fato, o morfismo de projeção

$$\begin{array}{rcl} f: \quad Y & \to & X \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$$

tem inversa dada por

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: X & \to & Y \\ t & \mapsto & (t, 1/t). \end{array}$$

Como $1/t$ é regular em X, então f^{-1} um morfismo mostrando que $X \cong Y$. Assim X é conjunto algébrico afim, mas claramente X não é fechado afim. Deste modo, a noção de fechado afim não é invariante por isomorfismo, mas a noção de conjunto algébrico afim é.

Analogamente, um conjunto algébrico quasi-projetivo X é dito *projetivo* se for isomorfo a um fechado projetivo. Em particular todo fechado projetivo é conjunto algébrico projetivo. Veremos no Corolário 2.15 que todo conjunto algébrico quasi-projetivo é um fechado projetivo.

Exemplo.(*Mergulho de Veronese*) Uma *hipersuperfície de grau d de* $\mathbb{P}^n$ é o conjunto X dos zeros de um polinômio homogêneo $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ de grau d. Se $d = 1$, dizemos que X é um *hiperplano.* O mergulho de Veronese permite realizar hipersuperfícies de grau d como hiperplanos.

Tome $N = \binom{n+d}{d} - 1$. O megulho de Veronese é um morfismo injetor

$$\nu = \nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

tal que se X é hipersuperfície de grau d então $\nu(X)$ é um hiperplano da imagem $\nu(\mathbb{P}^n)$, isto é $\nu(X)$ é a interseção de $\nu(\mathbb{P}^n)$ com um hiperplano de $\mathbb{P}^N$. Escreveremos as coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^N$ como $v_{i_0,\ldots,i_n}$ onde $i_0, \ldots, i_n \geq 0$ e $i_0 + \ldots + i_n = d$. O mapa $\nu : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ é dado por

$$\nu(x_0 : \ldots : x_n) = (\ldots : v_{i_0,\ldots,i_n} : \ldots) = (\ldots : x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} : \ldots).$$

É claro que ν é um mofismo, pois é dado por polinômios homogêneos sem zeros em comum.

Vejamos que a imagem $\nu(\mathbb{P}^n)$ é o conjunto de zeros dos polinômios

$$V_{i_0,\ldots,i_n} \cdot V_{j_0,\ldots,j_n} = V_{k_0,\ldots,k_n} \cdot V_{l_0,\ldots,l_n} \tag{4}$$

onde $i_r + j_r = k_r + l_r$ para todo $r = 0, \ldots, n$. De fato, é óbvio por definição que os pontos de $\nu(\mathbb{P}^n)$ satisfazem (4). Reciprocamente, se $v = (\ldots : v_{i_0,\ldots,i_n} : \ldots)$ satisfaz (4), temos que pelo menos uma das coordenadas do tipo $v_{0,\dots,d,\dots,0}$ é não nula pois, caso contrário, todas as coordenadas de v seriam nulas por (4). Supomos sem perda de generalidade que $v_{d,0,\dots,0} \neq 0$. Tome

$$x_0 = v_{d,0,\dots,0}, \quad x_1 = v_{d-1,1,0,\dots,0}, \quad \dots \quad x_n = v_{d-1,0,\dots,1}$$

e considere $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$. Queremos ver que $\nu(x) = v$. Temos

$$\begin{aligned} v(x) &= (\dots : (v_{d,0,\dots,0})^{i_0}(v_{d-1,1,0,\dots,0})^{i_1} \cdots (v_{d-1,0,\dots,1})^{i_n} : \dots) \\ &\overset{(*)}{=} (\dots : (v_{d,0,\dots,0})^{d-1}(v_{i_0,\dots,i_n}) : \dots) \\ &= (\dots : v_{i_0,\dots,i_n} : \dots) = v \end{aligned}$$

onde a igualdade $(*)$ segue de (4), já que

$$d \cdot i_0 + (d-1)(i_1 + \dots + i_n) = i_0 + (d-1)(i_0 + \dots + i_n) = i_0 + d(d-1).$$

Deste modo, temos que $\nu(\mathbb{P}^n)$ é fechado em $\mathbb{P}^N$. Mais ainda, o argumento acima mostra como construir uma inversa para o morfismo de Veronese, isto é, mostra que ν é um isomorfismo entre $\mathbb{P}^n$ e sua imagem $\nu(\mathbb{P}^n)$.

Para $n = 1$, a imagem $\nu_{1,d}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1$ e é chamada a *curva de Veronese* ou *curva normal racional* de grau d. Tomando por exemplo $n = 1$ e $d = 2$ temos

$$\begin{array}{rcl} \nu_{1,2} : \ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\sim} & \nu_{1,2}(\mathbb{P}^1) = \{(y_{2,0} : y_{1,1} : y_{0,2}) \in \mathbb{P}^2 \,|\, y_{1,1}^2 = y_{2,0}y_{0,2}\} \\ (x_0 : x_1) & \mapsto & (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2) \\ (y_{2,0} : y_{1,1}) & \leftarrow & (y_{2,0} : y_{1,1} : y_{0,2}), \ \text{ se } y_{2,0} \neq 0 \text{ ou } y_{1,1} \neq 0 \\ (y_{1,1} : y_{0,2}) & \leftarrow & (y_{2,0} : y_{1,1} : y_{0,2}), \ \text{ se } y_{1,1} \neq 0 \text{ ou } y_{0,2} \neq 0. \end{array}$$

O inverso do morfismo de Veronese é um exemplo de um morfismo que não pode ser dado globalmente por polinômios homogêneos.

Agora tome $X \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau d, digamos $X = Z_p(F)$ com

$$F = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0,\dots,i_n} T_0^{i_0} \cdots T_n^{i_n} \in k[T_0, \dots, T_n]$$

homogêneo de grau d. Então a imagem $\nu(X)$ é a inteseção de $\nu(\mathbb{P}^n)$ com o hiperplano H de $\mathbb{P}^N$ dado por

$$\sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0,\dots,i_n} V_{i_0,\dots,i_n}.$$

Mais ainda, temos isomorfismo

$$X \overset{\sim}{=} \nu(X) = \nu(\mathbb{P}^n) \cap H. \tag{5}$$

Definição. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado e $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ um polinômio homogêneo. Então o aberto

$$X_F := \{x \in X \mid F(x) \neq 0\}$$

é chamado um *aberto principal* de X. Note que se $f \in k[X]$ então o aberto $X_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ também é um aberto principal. De fato, se $f = P/Q$ então $f(x) \neq 0$ se e somente se $P(x) \neq 0$, isto é, $X_f = X_P$.

Usando o mergulho de Veronese mostraremos que os abertos principais em um fechado projetivo X são conjuntos algébricos afins. Note que os abertos principais formam uma cobertura de X, isto é, temos

$$X = \bigcup_{F \in k[T_0, \ldots, T_n]} X_F.$$

Dizemos que X tem uma *cobertura por abertos afins*, isto é, abertos em X que são conjuntos algébricos afins.

Proposição 2.5 *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um fechado e $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$ homogêneo de grau $d \geq 1$. Então o aberto principal X_F é um conjunto algébrico afim.*

Demonstração. Primeiro supomos que F tem grau 1, isto é, $F = a_0T_0 + \ldots + a_nT_n$ com $a_0, \ldots, a_n \in k$. Vamos construir um isomorfismo de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^n$ tal que

$$\mathbb{P}^n_F = \mathbb{P}^n - Z_p(F) \cong \mathbb{A}^n_0 = \mathbb{P}^n - Z_p(T_0),$$

o que ocorre se e somente se

$$Z_p(F) \cong Z_p(T_0).$$

Note que $Z_p(F)$ é um hiperplano. Como o polinômio F é não nulo, temos $a_i \neq 0$ para algum $i = 0, \ldots, n$. Considere o morfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^n & \to & \mathbb{P}^n \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \mapsto & (y_0 : \ldots : y_n) \end{array}$$

dado por

$$y_0 = a_0x_0 + \ldots + a_nx_n, \quad y_i = x_0, \quad y_j = x_j \text{ se } j \neq 0, i.$$

Então φ é um isomorfismo com inversa $\varphi^{-1}(y_0 : \ldots : y_n) = (x_0 : \ldots : x_n)$ onde

$$x_0 = y_i, \quad x_i = \frac{1}{a_i}\left(y_0 - a_0y_i - \sum_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i} a_jy_j \right), \quad x_j = y_j \text{ se } j \neq 0, i.$$

Note que $\varphi(Z_p(F)) = Z_p(T_0)$ e logo $\mathbb{P}^n_F \cong \mathbb{A}^n_0 \cong \mathbb{A}^n$, mostrando que $\mathbb{P}^n_F$ é conjunto algébrico afim.

Agora suponha que F tem grau d e considere o mergulho de Veronese

$$\nu = \nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

onde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Seja $Y = Z_p(F)$. Por (5) temos $Y \cong \nu(Y) = \nu(\mathbb{P}^n) \cap H$, onde H é um hiperplano em $\mathbb{P}^N$. Então

$$\mathbb{P}^n_F = \mathbb{P}^n - Y \cong \nu(\mathbb{P}^n) - \nu(Y) = \nu(\mathbb{P}^n) \cap (\mathbb{P}^N - H).$$

Pela primeira parte temos $\mathbb{P}^N - H \cong \mathbb{A}^N$. Como $\nu(\mathbb{P}^n)$ é fechado em $\mathbb{P}^N$, então $\nu(\mathbb{P}^n) \cap (\mathbb{P}^N - H)$ é fechado em $\mathbb{P}^N - H \cong \mathbb{A}^N$. Logo $\mathbb{P}^N_F$ é conjunto algébrico afim.

Por último, tome $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado. Então $X_F = X \cap \mathbb{P}^n_F$ é fechado no conjunto agébrico afim $\mathbb{P}^n_F$ e assim X_F é também um conjunto algébrico afim. □

Na parte final da demonstração usamos o seguinte resultado:

Lema 2.6 *Seja X um conjunto algébrico afim e $Y \subset X$ um fechado. Então Yé um conjunto algébrico afim.*

Demonstração. Tome $W \subset \mathbb{A}^n$ fechado com isomorfismo $\varphi : X \to W$. Seja $\psi : W \to X$ a inversa de φ. Como ψ é contínua, então $\varphi(Y) = \psi^{-1}(Y)$ é fechado em W. Deste modo, $\varphi(Y) = W \cap Z$ com $Z \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Ora, W e Z são fechados em $\mathbb{A}^n$ e logo $\varphi(Y)$ é também fechado em $\mathbb{A}^n$. Assim $Y \cong \varphi(Y)$ é conjunto algébrico afim. □

2.3 Produtos

Tome $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados afins. Suponha que

$$X = Z(F_1, \ldots, F_r) \quad Y = Z(G_1, \ldots, G_s)$$

onde $F_1, \ldots, F_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ e $G_1, \ldots, G_s \in k[S_1 \ldots, S_m]$. Considere o *produto*

$$X \times Y := \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{A}^{n+m} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in X, (y_1, \ldots, y_m) \in Y\}.$$

Então $X \times Y$ é fechado em $\mathbb{A}^{n+m}$ já que

$$X \times Y = Z(F_1, \ldots, F_r, G_1, \ldots, G_s)$$

onde consideramos $k[\mathbb{A}^{n+m}] = k[T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$. Deste modo, identificamos $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ com $\mathbb{A}^{n+m}$.

Obs. A topologia em $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ dada acima não é a topologia produto. De fato, como $\mathbb{A}^n$ não é Hausdorff, a diagonal

$$\Delta_{\mathbb{A}^n} = \{(x,x) \,|\, x \in \mathbb{A}^n\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$$

não é fechada na topologia produto. Mas é claro que $\Delta_{\mathbb{A}^n}$ é fechada em $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ já que é o conjunto de zeros dos polinômios $T_i - S_i$ com $i = 1, \ldots, n$.

Para X e Y conjuntos algébricos quasi-projetivos, é mais complicado ver o produto $X \times Y$ como um conjunto algébrico. De fato, o procedimento acima não funciona, pois não existe maneira natural de identificar $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com $\mathbb{P}^{n+m}$. Para ver o produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como um conjunto algébrico projetivo, usamos o mergulho de Segre.

Teorema 2.7 (Mergulho de Segre) *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^{nm+n+m} \\ ((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)) & \mapsto & (\ldots : x_i y_j : \ldots) \end{array}$$

é injetora. Se consideramos $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ com coordenadas z_{ij} onde $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$, então φ tem como imagem o fechado projetivo

$$\{(\ldots : z_{ij} : \ldots) \in \mathbb{P}^{nm+n+m} \,|\, z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj}, \ \textit{para} \ 0 \leq i,k \leq n, \, 0 \leq j,l \leq m\}.$$

Demonstração. Primeiro note que φ está bem definida, isto é, existem i, j tais que $x_i y_j \neq 0$. Mais ainda, temos $\varphi(\mathbb{A}^n_i \times \mathbb{A}^m_j) \subset \mathbb{A}^{nm+n+m}_{ij}$. Primeiro temos que mostrar que φ tem uma inversa. Tome $z = (\ldots : z_{ij} : \ldots) \in \mathbb{P}^{nm+n+m}$ tal que

$$z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj} \tag{6}$$

para $0 \leq i,k \leq n$, $0 \leq j,l \leq m$. Suponha sem perda de generalidade que $z \in \mathbb{A}^{nm+n+m}_{kl}$, de modo que $z_{kl} = 1$. Definimos pontos $x \in \mathbb{P}^n$ e $y \in \mathbb{P}^m$ por

$$\begin{aligned} x_i &= z_{il} \quad \text{para } i = 0, \ldots, n \\ y_j &= z_{kj} \quad \text{para } j = 0, \ldots, m. \end{aligned}$$

Note que $x_k = y_l = z_{kl} = 1$ e logo $x \in \mathbb{A}^n_k$ e $y \in \mathbb{A}^m_l$. Vamos mostrar que o mapa definido por

$$\psi : z \mapsto (x, y)$$

é inversa de φ.

De fato, tome $z \in \mathbb{A}^{nm+n+m}_{kl}$. Para x e y como definidos acima, temos

$$\varphi(x,y) = (\ldots : x_i y_j : \ldots) = (\ldots : z_{ij} : \ldots) = z,$$

já que

$$x_i y_j = z_{il} y_{kj} = z_{ij} z_{kl} = z_{ij}.$$

Assim $\varphi \circ \psi = 1$. Analogamente, $\psi \circ \varphi = 1$ já que se $z = \varphi(x, y)$ então $z_{ij} = x_i y_j$ e logo

$$\begin{aligned} (z_{0l} : \ldots : z_{nl}) &= (x_0 y_l : \ldots : x_n y_l) = (x_0 : \ldots : x_n) = x \\ (z_{k0} : \ldots : z_{km}) &= (x_k y_0 : \ldots : x_k y_m) = (y_0 : \ldots : y_n) = y. \end{aligned}$$

□

Obs. A imagem do mergulho de Segre é uma variedade determinantal. De fato, podemos expressar $z \in \mathbb{P}^{nm+n+m}$ como uma matriz (z_{ij}) de ordem $(n+1)\times(m+1)$. A condição (6) é então a condição de anulamento dos menores 2×2 da matriz. Assim vemos que a imagem de φ é a variedade determinantal

$$X_1 = \{(z_{ij}) \,|\, \mathrm{rk}(z_{ij}) \leq 1\}.$$

Identificamos então o produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com sua imagem $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ em $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ e desta forma consideramos $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como um fechado projetivo. Via esta identificação, os fechados em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ são os subconjuntos $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tais que $\varphi(Z)$ é fechado em $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, ou melhor, fechado em $\mathbb{P}^{nm+n+m}$. A topologia definida acima é a *topologia de Zariski* em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Novamente a topologia de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ não é a topologia produto. Vejamos que a topologia de Zariski contém todos os abertos da topologia produto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Lembre que se X_1 e X_2 são espaços topológicos, a *topologia produto* em $X_1 \times X_2$ é a topologia gerada pelos conjuntos da forma $X_1 \times Y_2$ e $Y_1 \times X_2$ onde $Y_i \subset X_i$ é fechado para $i = 1, 2$.

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um fechado. Vejamos que $X \times \mathbb{P}^m$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Para isso primeiro considere um polinômio

$$F = \sum_{e_0+\ldots+e_n=d} a_{e_0,\ldots,e_n} T_0^{e_0} \cdots T_n^{e_n}$$

homogêneo de grau d em $k[T_0, \ldots, T_n]$. Para cada $j = 0, \ldots, m$ considere o polinômio

$$F \cdot S_j^d = \sum_{e_0+\ldots+e_n=d} a_{e_0,\ldots,e_n} (T_0 S_j)^{e_0} \cdots (T_n S_j)^{e_n}.$$

Fazendo $Z_{ij} = T_i S_j$, obtemos um polinômio homogêneo de grau d

$$F^{(j)} := \sum_{e_0+\ldots+e_n=d} a_{e_0,\ldots,e_n} Z_{0j}^{e_0} \cdots Z_{nj}^{e_n}.$$

Note que $x \in Z_p(F)$ se e somente se para todo $y \in \mathbb{P}^m$ temos $\varphi(x,y) \in Z_p(F^{(0)}, \ldots, F^{(m)})$. Assim, dado um fechado $X = Z_p(F_1, \ldots, F_r)$ de $\mathbb{P}^n$, então

$$\varphi(X \times \mathbb{P}^m) = Z_p(F_1^{(0)}, \ldots, F_1^{(m)}, \ldots, F_r^{(0)}, \ldots, F_r^{(m)})$$

é fechado em $\mathbb{P}^{nm+n+m}$. Portanto $X \times \mathbb{P}^m$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Do mesmo modo, mostra-se que $\mathbb{P}^n \times Y$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ para todo fechado $Y \subset \mathbb{P}^m$. Assim a topologia de Zariski é mais fina que a topologia produto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Vamos ver no Corolário 2.10 que a diagonal em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ é fechado na topologia de Zariski mas, como $\mathbb{P}^n$ não é Hausdorff, não é fechado na topologia produto.

Proposição 2.8 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é fechado se e somente se*

$$X = \{((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid H_l(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m) = 0, \, \forall l = 0, \ldots, k\}$$

onde os $H_l(T_0, \ldots, T_n, S_0, \ldots, S_m)$ são polinômios bihomogêneos*, isto é, homogêneos em $T_0, \ldots, T_n$ e homogêneos em $S_0, \ldots, S_m$.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ fechado. Então $\varphi(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^{nm+n+m}$, digamos

$$\varphi(X) = Z_p(H_1, \ldots, H_k) \quad \text{com } H_l \in k[Z_{00}, \ldots, Z_{ij}, \ldots, Z_{nm}]$$

homogêneo para $1 \leq l \leq k$. Então X é o conjunto de zeros dos polinômios bihomogêneos

$$H_l(T_0S_0, \ldots, T_iS_j, \ldots, T_nS_m)$$

para $l = 1, \ldots, k$. (Note que o grau de H_l em $T_0, \ldots, T_n$ e em $S_0, \ldots, S_m$ é o mesmo.)

Reciprocamente, polinômios bihomogêneos em $T_0, \ldots, T_n$ e $S_0, \ldots, S_m$ com graus iguais podem ser escritos como polinômios homogêneos em $Z_{ij} = T_iS_j$. Se $F(T_0, \ldots, T_n, S_0, \ldots, S_m)$ for bihomogêneo com grau d_1 nos T_i's e d_2 nos S_j's com $d_1 \geq d_2$, então os polinômios

$$S_j^{d_1-d_2}F, \quad j = 0, \ldots, m$$

são bihomogêneos de graus iguais com os mesmos zeros de F. Deste modo, polinômios bihomogêneos produzem fechados em $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ e logo fechados em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. $\square$

Corolário 2.9 *Os fechados em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ são conjuntos de zeros comuns de polinômios em $k[T_0, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m]$ homogêneos em $T_0 \ldots, T_n$.*

Demonstração. Óbvio pois $\mathbb{A}^m = \mathbb{A}_0^m \subset \mathbb{P}^m$. $\square$

Corolário 2.10 *Se X é um conjunto algébrico quasi-projetivo, então a* diagonal

$$\Delta_X := \{(x,x) \,|\, x \in X\}$$

é fechado em $X \times X$.

Demonstração. Basta ver que $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. De fato, $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ é o conjunto de zeros dos polinômios bihomogêneos $T_iS_j - T_jS_i$ para $0 \leq i, j \leq n$. □

Via a identificação $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, podemos considerar morfismos de produtos de conjuntos algébricos quasi-projetivos.

Corolário 2.11 *Se $f : X \to Y$ é um morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos, então o* gráfico de f

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in X \times Y \,|\, y = f(x)\}$$

é fechado em $X \times Y$.

Demonstração. De fato, Γ_f é a imagem inversa de Δ_Y com respeito ao morfismo

$$\begin{array}{rcl} X \times Y & \to & Y \times Y \\ (x,y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array},$$

e como Δ_Y é fechado, temos Γ_f fechado. □

Teorema 2.12 *Seja X um fechado projetivo e Y um conjunto algébrico quasi-projetivo. Então a projeção $p : X \times Y \to Y$ leva fechados em fechados.*

Obs. O teorema não vale em geral se X é afim. Por exemplo considere a projeção

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 & \to & \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1. \end{array}$$

Então $X = Z(T_1T_2 - 1)$ é fechado em $\mathbb{A}^2$ mas $p(X) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ não é fechado em $\mathbb{A}^1$.

Demonstração. Primeiro note que se $X \subset \mathbb{P}^n$ é fechado, então os fechados de X são fechados de $\mathbb{P}^n$ e logo podemos tomar $X = \mathbb{P}^n$. Além disso, como ser fechado é uma propriedade local, podemos cobrir Y por abertos afins e mostrar o teorema para cada um deles. Assim podemos assumir que Y é afim, ou melhor, $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechado afim. Então $\mathbb{P}^n \times Y$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ e podemos supor que $Y = \mathbb{A}^m$.

Agora, pelo Corolário 2.9, todo fechado $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ é definido por equações

$$G_1, \ldots, G_r \in k[T_0, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m] \tag{7}$$

homogêneas em $T_0, \ldots, T_n$. Considere $q = p|_Z : Z \to \mathbb{A}^m$ a restrição da projeção p a Z. Então para cada $y \in \mathbb{A}^m$, o conjunto $q^{-1}(y)$ consiste das soluções não nulas das equações $g_1, \ldots, g_r$ obtidas substituindo $(S_1, \ldots, S_m)$ pelas coordenadas de y. Assim, $y \in p(Z)$ se e somente se

$$g_1 = \ldots = g_r = 0$$

possui solução não nula. Temos então que mostrar que para cada sistema de equações como (7), o conjunto $W \subset \mathbb{A}^m$ dos y para os quais $g_1 = \ldots = g_r = 0$ tem solução não nula é fechado. O lema a seguir termina a prova do teorema. $\square$

Lema 2.13 *Para $i = 1, \ldots, r$ tome $G_i(T_0, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m)$ polinômios homogêneos em $T_0, \ldots, T_n$. Então o seguinte conjunto é fechado*

$$W = \left\{ (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{A}^m \;\middle|\; \begin{array}{c} \textit{os polinômos } g_i(T_0, \ldots, T_n) = G_i(T_0, \ldots, T_n, y_1, \ldots, y_m), \\ 1 \leq i \leq r, \textit{ têm zeros em comum em } \mathbb{P}^n \end{array} \right\}$$

Demonstração. Seja $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{A}^m$ e tome

$$g_i(T_0, \ldots, T_n) = G_i(T_0, \ldots, T_n, y_1, \ldots, y_m)$$

para $i = 1, \ldots, r$. Pelo Corolário 2.2, temos $Z_p(g_1, \ldots, g_r) = \emptyset$ se e somente se o ideal $J_y := \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ contém o conjunto

$$H_d = \{\text{polinômios homogêneos de grau } d\} \subset k[T_0, \ldots, T_n]$$

para algum $d \geq 1$. Seja

$$W_d = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{A}^m \mid J_y \not\supset H_d\}.$$

Então $W = \bigcap_{d \geq 1} W_d$ e logo basta mostrar que cada W_d é fechado.

Note que H_d é um k-espaço vetorial de dimensão $\binom{n+d}{d}$ com base dada pelos monômios $T_0^{e_0} \cdots T_n^{e_n}$ onde $e_0 + \ldots + e_n = d$. Seja d_i o grau do polinômio g_i. A propriedade de o ideal J_y não conter H_d significa que o homomorfismo de k-espaços vetoriais

$$\begin{array}{ccc} H_{d-d_1} \times \ldots \times H_{d-d_r} & \longrightarrow & H_d \\ (h_1, \ldots, h_r) & \mapsto & \sum_{i=1}^r h_i g_i \end{array}$$

não é sobrejetor. Este homomorfismo é dado por uma matriz cujos coeficientes são expressões polinomiais em $y_1, \dots, y_m$. A condição do homomorfismo não ser sobrejetor significa que o posto desta matriz é menor ou igual a $\binom{n+d}{d} - 1$, isto é, que os determinantes dos menores $\binom{n+d}{d} \times \binom{n+d}{d}$ são nulos. Esta condição é polinomial em y e assim W_d é (determinantal e logo) fechado. Portanto W é fechado. □

Proposição 2.14 *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos. Suponha que X é um fechado projetivo. Então a imagem $f(X)$ é fechado em Y. Mais ainda, $f(X)$ é um fechado projetivo.*

Demonstração. Considere o morfismo de projeção $p : X \times Y \to Y$. Sendo Γ_f o gráfico de f, temos $f(X) = p(\Gamma_f)$. Como Γ_f é fechado em $X \times Y$ então, pelo Teorema 2.12, temos $p(\Gamma_f) = f(X)$ fechado em Y.

Agora suponha $Y \subset \mathbb{P}^m$ e considere a composição

$$g : X \xrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^m$$

onde i é a inclusão. Então $g(X) = f(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^m$. □

Corolário 2.15 *Todo conjunto algébrico projetivo é um fechado projetivo.*

Demonstração. Seja X um conjunto algébrico projetivo, isto é, X é isomorfo a um fechado projetivo Y. Tome $f : Y \to X$ um isomorfismo. Pela Proposição 2.14, $f(Y) = X$ é fechado projetivo. □

Corolário 2.16 *Toda função regular em uma variedade projetiva é constante.*

Demonstração. Tome $f \in k[X]$, então f define um morfismo $f : X \to \mathbb{A}^1$ e, pela Proposição 2.14, $f(X)$ é fechado em $\mathbb{A}^1$. Assim, $f(X)$ é finito ou é igual a $\mathbb{A}^1$. Por outro lado, f define um morfismo

$$\overline{f} : X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Pela Proposição 2.14, $\overline{f}(X) = f(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^1$ e logo $f(X) \neq \mathbb{A}^1$, pois $\mathbb{A}^1$ não é fechado em $\mathbb{P}^1$. Portanto $f(X)$ é finito. Além disso, como X é irredutível, então $f(X)$ é irredutível (exercício) e assim $f(X)$ consiste de um único ponto. □

Corolário 2.17 *Uma variedade que é afim e projetiva consiste de um único ponto.*

Demonstração. Se X for variedade projetiva, pelo Corolário 2.16, temos $k[X] = k$. Por outro lado, como X é afim e $k[X]$ é corpo, temos que ter $I(X)$ maximal e, pelo Teorema 1.9, X consiste de um único ponto. $\square$

2.4 Funções racionais

Uma *função racional* em um conjunto algébrico quasi-projetivo X é uma função regular definida sobre um aberto denso U de X. Duas funções regulares f e g em abertos densos U e V de X definem a mesma função racional em X se e somente se f e g coincidem em $U \cap V$. Seja $k(X)$ o conjunto das funções racionais em X. Temos então que

$$k(X) = \{(f, U) \mid f \in k[U],\, U \subset X \text{ aberto denso}\}/\sim$$

onde $(f, U) \sim (g, V)$ se e somente se $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. O *domínio de definição* de $\varphi \in k(X)$ é o maior aberto de X onde φ pode ser definida, isto é, é a união de todos os abertos densos U de X tais que $\varphi \sim (f, U)$ para algum f.

Obs. 1 - Para cada aberto denso U de X temos $k[U] \subset k(X)$. Mais ainda, vale $k(U) = k(X)$ e além disso

$$k(X) = \bigcup k[U]$$

onde a união é sobre todos os abertos densos de X.

2 - Note que $k(X)$ é uma k-álgebra. De fato, se f e g são funções racionais definidas por funções regulares em abertos densos U e V de X, então $f+g$ (resp. $f \cdot g$) é a função racional em X definida pela função regular $f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}$ (resp. $f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}$) no aberto denso $U \cap V$ de X. Além disso, se $a \in k$ então $a \cdot f$ é a função racional em X definida pela função regular $a \cdot f$ no aberto denso U de X.

Proposição 2.18 *Seja X uma variedade afim. Então $k(X)$ é o corpo quociente de $k[X]$.*

Demonstração. Como X é variedade afim, temos X isomorfo a algum $Y \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Como $k[X] \cong k[Y]$, podemos supor $X \subset \mathbb{A}^n$ fechado irredutível. Agora, como os abertos principais X_F formam uma base da topologia de Zariski, temos

$$k(X) = \bigcup k[X_F]$$

onde $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Note que como X é irredutível, então todo aberto de X é denso. Agora para cada F seja f a imagem de F em $k[X]$. Pelo Lema 2.20 temos

$$k[X_F] = \left\{ \frac{g}{f^m} \middle| \, g \in k[X], \, m \geq 0 \right\},$$

mostrando a afirmação. □

Corolário 2.19 *Se X é variedade quasi-projetiva, então $k(X)$ é corpo.*

Demonstração. Tome $U \subset X$ aberto afim não vazio. Então $k(U)$ é corpo pela Proposição 2.18 e como $k(X) = k(U)$, temos que $k(X)$ é corpo. □

Lema 2.20 *Seja X um conjunto algébrico afim ou projetivo e tome $f \in k[X]$ Considere o aberto principal $X_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$. Então*

$$k[X_f] = k[X][1/f] = \left\{ \frac{g}{f^m} \middle| \, g \in k[X], \, m \geq 0 \right\}.$$

Demonstração. Primeiro supomos X afim. Podemos então supor $X \subset \mathbb{A}^n$ fechado para algum n. Sejam $G_1, \ldots, G_r \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tais que $I(X) = \langle G_1, \ldots, G_r \rangle$. Considere o fechado afim $W \subset \mathbb{A}^{n+1}$ dado por

$$W = Z(G_1, \ldots, G_r, FT_{n+1} - 1)$$

onde $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ é tal que a imagem de F no quociente $k[X]$ é f. Então $W \cong X_f$. De fato, o morfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{A}^{n+1} & \rightarrow & \mathbb{A}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

é tal que $\varphi(W) = X_f$ e a inversa

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : X_f & \rightarrow & W \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n, 1/f(x_1, \ldots, x_n)) \end{array}$$

é um morfismo, já que $1/f$ é regular em X_f. Assim $X_f \cong W$ e portanto

$$k[X_f] \cong k[W] \cong \frac{k[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]}{\langle G_1, \ldots, G_r, FT_{n+1} - 1 \rangle} \cong \frac{k[X][T_{n+1}]}{\langle fT_{n+1} - 1 \rangle} \cong k[X][1/f].$$

Agora seja $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado. Considere a projeção canônica

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} & \rightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_0 : \ldots : x_n). \end{array}$$

Note que uma função $g : X_f \to k$ regular induz uma função regular $g \circ \pi$ em $\pi^{-1}(X_f) \cup \{0\}$. Agora, $\pi^{-1}(X) \cup \{0\} = C$ é um cone fechado em $\mathbb{A}^{n+1}$ e $\pi^{-1}(X_f) \cup \{0\} = C_{\pi \circ f}$. O resultado segue então do caso afim. $\square$

Definição. Seja X um conjunto algébrico quasi-projetivo. Um *mapa racional* $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ é dado por, equivalentemente

(i) $f(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$ para todo x em um aberto denso U de X, onde $F_0, \ldots, F_m \in k(X)$ não têm zeros em comum em U e tais que, se U_i é o domínio de definição de F_i, então $U \subset U_i$;

(ii) um morfismo $f : U \to \mathbb{P}^m$ onde U é um aberto denso de X e tal que, se $g : V \to \mathbb{P}^m$ é morfismo de um aberto denso V de X que coincide com f em $U \cap V$, então f e g definem o mesmo mapa racional.

Se $Y \subset \mathbb{P}^m$ é tal que $f(X) := f(U) \subset Y$, então podemos escrever $f : X \dashrightarrow Y$. Como no caso afim, se $f(X)$ é denso em Y, então f define um homomorfismo injetor de corpos

$$f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$$

dado por $f^* g = g \circ f$ (mapa de pullback). Se f tem uma inversa racional $g : Y \dashrightarrow X$ tal que as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ são identidades onde estiverem definidas, então dizemos que f é *birracional* e que X e Y são *birracionais* ou *birracionalmente equivalentes.* Neste caso, o mapa de pullback f^* é um isomorfismo de corpos.

Proposição 2.21 *Duas variedades quasi-projetivas são birracionais se e somente se existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $U \cong V$.*

Demonstração. Se $U \cong V$ então X e Y são birracionais por definição. Agora suponha que X e Y são birracionais e tome $f : X \dashrightarrow Y$ mapa birracional com $g = f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ sua inversa racional. Sejam $U_1 \subset X$ e $V_1 \subset Y$ os abertos de definição de f e g. Por hipótese, $f(U_1)$ é denso em Y e logo $U = f^{-1}(V_1) \cap U_1$ é um aberto não vazio de X. Tome $V = g^{-1}(U_1) \cap V_1$ aberto não vazio de Y. Então

$$f(U) = V \quad \text{e} \quad g(V) = U$$

e $f \circ g|_V = 1_V$ e $g \circ f|_U = 1_U$. Logo U e V são isomorfos. $\square$

Exemplo. 1 - $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n$ são birracionais pois $\mathbb{A}^n$ é isomorfo ao aberto denso $\mathbb{A}^n_0$ de $\mathbb{P}^n$. É claro que $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n$ não são isomorfos.

2 - $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ são birracionalmente equivalentes pois os abertos densos $\mathbb{A}^2$ e $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ são isomorfos. Porém $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ não são isomorfos pois, entre outros motivos, quaisquer duas

hipersuperfícies de $\mathbb{P}^2$ se intersectam, o que não ocorre em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. (Veja a observação após o Teorema 4.6 para mais detalhes.)

3 Morfismos finitos e variedades normais

Antes de definirmos morfismos finitos, precisamos relembrar uma noção de álgebra. Tome $A \subset B$ anéis comutativos com unidade, supomos sempre que a unidade de A é igual à unidade de B. Dizemos que um elemento $b \in B$ é *inteiro* sobre A se b é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em A, isto é, se existem $a_1, \ldots, a_r \in A$ tais que

$$b^r + a_1 b^{r-1} + \ldots + a_r = 0.$$

Dizemos que B é *inteiro* sobre A se todo elemento de B é inteiro sobre A.

Lema 3.1 *Sejam $A \subset B$ anéis comutativos com unidade. Suponha que B é finitamente gerado como A-álgebra. Então B é inteiro sobre A se e somente se B é finitamente gerado como A-módulo.*

Demonstração. Mostraremos o lema para B gerado como A-álgebra por um único elemento. O caso geral segue por indução e pode ser encontrado em Atiyah-Macdonald, Proposições 5.1 e 5.2. Supomos então que $B = A[b]$ e neste caso temos $B = \bigoplus_{n \geq 0} b^n A$.

Suponha que B é inteiro sobre A, isto é, que b satisfaz $b^r + a_1 b^{r-1} + \ldots + a_r = 0$. Mas então, para $n \geq r$, todo b^n pode ser escrito como combinação linear de $b, b^2, \ldots, b^{r-1}$ com coeficientes em A e portanto $B = \bigoplus_{n=0}^{r-1} b^n A$.

Por outro lado se B é finitamente gerado como A-módulo então $B = \bigoplus_{i=0}^{n} b^{e_i} A$. Seja $r - 1$ o máximo entre os e_i. Então todo b^s com $s \geq r$ pode ser escrito como combinação linear de $b^{e_1}, \ldots, b^{e_n}$ com coeficientes em A, ou seja, $b^s = a_1 b^{e_1} + \ldots + a_n b^{e_n}$ e portanto b é inteiro sobre A. $\square$

Agora sejam X e Y fechados afins e $f : X \to Y$ um morfismo. Dizemos que f é *dominante* se $f(X)$ for denso em Y, isto é, $\overline{f(X)} = Y$. Se f é dominante, então o mapa de pullback

$$\begin{aligned} f^* : k[Y] &\to k[X] \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

é injetor. De fato, se $g \in k[Y]$ é tal que $g \circ f = 0$ em $k[X]$ então $g(y) = 0$ para todo $y \in f(X)$. Assim temos $f(X) \subset Z(g) \subset Y$ e, como $Z(g)$ é fechado em Y, temos também que $\overline{f(X)} \subset Z(g)$. Como f é dominante, isto implica que $Z(g) = Y$, ou seja, $g = 0$ em $k[Y]$ e portanto f^* é injetor.

Deste modo, se $f : X \to Y$ é um morfismo dominante, então podemos naturamente ver $k[Y]$ como subanel de $k[X]$.

Definição. Seja $f : X \to Y$ um morfismo de fechados afins. Dizemos que f é *finito* se f é dominante e, com a inclusão natural $k[Y] \hookrightarrow k[X]$ dada por f^*, temos $k[X]$ inteiro sobre $k[Y]$.

Obs. Pelas propriedades de anéis inteiros, temos que a composição de morfismos finitos é um morfismo finito.

Exemplo. 1 - Seja $X = Z(T_1T_2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. A projeção

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$$

é um morfismo dominante, já que $f(X) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$. Porém f não é finito, já que

$$k[T] = k[\mathbb{A}^1] \overset{f^*}{\hookrightarrow} k[X] \cong k[T, T^{-1}]$$

e T^{-1} não é inteiro sobre $k[T]$.

2 - Agora tome $X = Z(T_1^3 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^2$ e considere o morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^1 & \to & X \\ t & \mapsto & (t^2, t^3). \end{array}$$

Vejamos que f é finito. É óbvio que f é dominante. (Mais ainda, f é sobrejetiva. Veremos no Teorema 3.5 que isto vale para todo morfismo finito.) Temos $k[X] = k[T_1, T_2]/\langle T_1^3 - T_2^2 \rangle$. O mapa de pullback é dado por

$$\begin{array}{rcl} f^* : k[X] & \to & k[\mathbb{A}^1] = k[T] \\ T_1 & \mapsto & T^2 \\ T_2 & \mapsto & T^3 \end{array}$$

e assim, via f^*, temos $T = T_2/T_1$. Precisamos apenas ver que T é inteiro sobre $k[X]$. Temos

$$T^3 = \frac{T_2^3}{T_1^3} = \frac{T_2^3}{T_2^2}$$

e portanto $T_2^2(T^3 - T_2) = 0$. Mas T_2 não é divisor de zeros em $k[X]$ (note que o anel $k[X]$ é um domínio) e logo temos que ter $T^3 - T_2 = 0$, mostrando que T é inteiro sobre $k[X]$. Assim f é finito.

Proposição 3.2 *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito de fechados afins. Então cada $y \in Y$ tem no máximo um número finito de pré-imagens.*

Demonstração. Suponha $X \subset \mathbb{A}^n$ e sejam $t_1, \ldots, t_n$ as imagens de $T_1, \ldots, T_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$ no quociente $k[X]$. Basta mostrarmos que cada t_i assume apenas um número finito de valores em $f^{-1}(y)$. Como f é finito, cada t_i satisfaz uma equação

$$t_i^r + a_1 t_i^{r-1} + \ldots + a_r = 0$$

onde $a_1, \ldots, a_r \in k[Y]$. Assim para cada $y \in Y$ e cada $x \in f^{-1}(y)$ temos a equação

$$t_i(x)^r + a_1(y) t_i(x)^{r-1} + \ldots + a_r(y) = 0$$

ou seja, $t_i(x)$ é raiz de um polinômio com coeficientes $a_j(y) \in k$, $j = 1, \ldots, r$. Deste modo existe apenas um número finito de valores possíveis para $t_i(x)$ para cada i e logo $f^{-1}(y)$ tem no máximo um número finito de elementos. $\square$

Veremos no próximo teorema que todo morfismo finito é sobrejetor. Antes porém precisamos de um importante resultado algébrico conhecido como lema de Nakayama. Este resultado tem várias formulações diferentes que podem ser encontrados em diversos livros de Álgebra Comutativa.

Lema 3.3 (Lema de Nakayama*) Seja A um anel comutativo e seja M um A-módulo finitamente gerado. Tome $J \subset A$ um ideal e considere o conjunto $1 + J := \{1 + b \,|\, b \in J\}$. Então a condição*

(i) para cada $a \in 1 + J$, temos $aM = 0 \Rightarrow M = 0$

implica na condição

(ii) $JM = M \Rightarrow M = 0$.

Demonstração. Suponha que M é gerado como A-módulo por $\mu_1, \ldots, \mu_n$, isto é,

$$M = \mu_1 A \oplus \ldots \oplus \mu_n A.$$

A hipótese $JM = M$ implica que para cada i podemos escrever

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mu_j$$

com $\alpha_{ij} \in J$. Assim temos

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - \delta_{ij}) \mu_j = 0,$$

onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Matricialmente, isto diz que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \delta_{11} & \cdots & \alpha_{1n} - \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} - \delta_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} - \delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - 1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pela regra de Cramer, temos então que $d\mu_i = 0$ onde $d = \det(\alpha_{ij} - \delta_{ij})$. Note que $d \in 1 + J$ e que $dM = 0$. Assim, por (i), temos $M = 0$. $\square$

Corolário 3.4 *Sejam $A \subset B$ anéis comutativos tais que B é um A-módulo finitamente gerado. Seja $J \subset A$ um ideal. Então $J \neq A$ implica que $JB \neq B$.*

Demonstração. Primeiro note que como $1 \in B$, então $aB = 0$ se e somente se $a = 0$. Além disso, se $J \neq A$ então $0 \notin 1 + J$. Assim, as hipóteses do Lema 3.3 são satisfeitas e logo $JB \neq B$. $\square$

Teorema 3.5 *Todo morfismo finito entre fechados afins é sobrejetor.*

Demonstração. Tome $y \in Y$ e seja $I_Y(y)$ o ideal em $k[Y]$ das funções que se anulam em y. Sejam $t_1, \ldots, t_n \in k[Y]$ as imagens de $T_1, \ldots, T_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$ no quociente, onde supomos $Y \subset \mathbb{A}^n$. Se $y = (a_1, \ldots, a_n)$ então $I_Y(y) = \langle t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n \rangle$. Deste modo, $f^{-1}(y)$ é definido por

$$f^*(t_1) - a_1, \ldots, f^*(t_n) - a_n.$$

Pelo Teorema dos Zeros (Teorema 1.7), temos $f^{-1}(y) = \emptyset$ se e somente se o ideal gerado por $f^*(t_1) - a_1, \ldots, f^*(t_n) - a_n$ em $k[X]$ é todo o $k[X]$. Mais precisamente, se e somente se,

$$I_Y(y)k[X] = k[X].$$

Agora, como f é finita, então $k[X]$ é um $k[Y]$-módulo finito (Lema 3.1). Assim, como $I_Y(y) \neq k[Y]$, temos pelo Corolário 3.4 que $I_Y(y)k[X] \neq k[X]$ e portanto $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$. Deste modo, f é sobrejetora. $\square$

Corolário 3.6 *Um morfismo finito $f : X \to Y$ entre fechados afins leva fechados em fechados, isto é, se $Z \subset X$ é fechado então $f(Z) \subset Y$ é fechado.*

Demonstração. Considere a restrição $f|_Z : Z \to \overline{f(Z)}$. Vejamos que $f|_Z$ é finito. Primeiro notamos que $f|_Z$ é dominante por definição. Agora tome $W = f(Z) \subset Y$. Então via f^* temos $k[W] \subset k[Z]$. Precisamos ver que $k[Z]$ é inteiro sobre $k[W]$. Tome $\alpha \in k[Z]$. Como $Z \subset X$ é fechado, temos pelo Teorema 1.13

$$k[Z] = k[X]/I_X(Z).$$

Seja $\beta \in k[X]$ tal que a imagem de β no quociente $k[Z]$ seja α. Como $k[X]$ é inteiro sobre $k[Y]$, podemos escrever

$$\beta^n + b_1\beta^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \tag{8}$$

onde $b_1, \ldots, b_n \in k[Y]$. Agora note que como $W \subset Y$ é fechado, temos novamente pelo Teorema 1.13 que

$$k[W] = k[Y]/I_Y(W).$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ seja $a_i \in k[W]$ a imagem de b_i no quociente. Como f^* leva $k[W]$ em $k[Z]$, passando (8) ao quociente temos

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

isto é, α é inteiro sobre $k[W]$. Assim $k[Z]$ é inteiro sobre $k[W]$ e $f|_Z$ é finito. Mas então, pelo Teorema 3.5, $f|_Z$ é sobrejetora mostrando que $f(Z) = \overline{f(Z)}$, ou seja, que $f(Z)$ é fechado. $\square$

Sejam X e Y conjuntos algébricos afins, digamos

$$f : X \xrightarrow{\sim} X' \quad \text{e} \quad g : Y \xrightarrow{\sim} Y'$$

com X' e Y' fechados afins. Um morfismo $h : X \to Y$ corresponde a um morfismo

$$h' : X' \xrightarrow{f^{-1}} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Y'.$$

Note que h é dominante se e somente se h' for dominante. Neste caso, como f^* e g^* são isomorfismos de k-álgebras, temos que $k[X]$ é finito sobre $k[Y]$ se e somente se $k[X']$ é finito sobre $k[Y']$. Assim, dizemos que h é *finito* quando h' for finito. Note que h é finito se for dominante e $k[X]$ é finito sobre $k[Y]$. Além disso, a Proposição 3.2, o Teorema 3.5 e o Corolário 3.6 continuam válidos para conjuntos algébricos afins.

A definição de morfismo finito entre conjuntos algébricos quasi-projetivos será feita localmente. Antes vamos então ver que a finitude é de fato uma propriedade local.

Proposição 3.7 *Seja $f : X \to Y$ um morfismo entre conjuntos algébricos afins. Suponha que para todo ponto $y \in Y$ existe aberto afim $V \subset Y$ contendo y tal que $U = f^{-1}(V)$ é afim e $f : U \to V$ é um morfismo finito. Então f é finito.*

Demonstração. Tome $B = k[X]$ e $A = k[Y]$. Como os abertos pricipais formam uma base da topologia de Zariski, podemos supor que V é principal, digamos

$$V = Y_g = \{y \in Y \mid g(y) \neq 0\},$$

com $g \in k[Y]$. Assim, temos

$$U = f^{-1}(V) = X_{f^*g} = \{x \in X \mid f^*g(x) \neq 0\}.$$

Pelo Lema 2.20, temos que

$$k[Y_g] = A[1/g] \quad \text{e} \quad k[X_{f^*g}] = B[1/g],$$

onde consideramos $1/g \in k[Y_g] \subset k[X_{f^*g}]$ via f^*.

Então $A[1/g] \subset B[1/g]$ e, como $f : U \to V$ é finito, temos pelo Lema 3.1 que $B[1/g]$ é finitamente gerado como $A[1/g]$-módulo com uma base $w_1, \ldots, w_r$. Note que podemos tomar os w_i em B pois, se tomarmos uma base da forma w_i'/g^k com $w_i' \in B$, então os w_i' também formam uma base. Cada $b \in B \subset B[1/g]$ se escreve então como

$$b = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{g^{n_i}} w_i \tag{9}$$

com $a_i \in A$ e $n_i \geq 0$. Agora, Y pode ser coberto por um número finito de abertos principais Y_{g_α} e para cada um destes temos expressões (9) que podem ser escritas como

$$b = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \frac{a_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_{i,\alpha}}} w_{i,\alpha} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \frac{a'_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_\alpha}} w_{i,\alpha}$$

com $a'_{i,\alpha} \in A$. Considere o ideal J de A gerado pelos $g_\alpha^{n_\alpha}$. Como os Y_{g_α} cobrem Y, para cada $y \in Y$ existe α tal que $g_\alpha(y) \neq 0$. Portanto o conjunto dos zeros de J em Y é vazio e, pelo Teorema Fraco dos Zeros (Teorema 1.9), temos $J = A$. Então podemos escrever $1 = \sum_\alpha h_\alpha g_\alpha^{n_\alpha}$ com $h_\alpha \in A$. Deste modo, temos

$$b = b \sum_\alpha h_\alpha g_\alpha^{n_\alpha} = \sum_i \sum_\alpha a'_{i,\alpha} h_\alpha w_{i,\alpha}.$$

Assim vemos que o conjunto de todos $w_{i,\alpha}$ forma uma base finita de B como A-módulo. Então f é finito, pelo Lema 3.1. □

Definição. Um morfismo $f : X \to Y$ entre conjuntos algébricos quasi-projetivos é dito *finito* se cada $y \in Y$ possui vizinhança aberta afim $V \subset Y$ contendo y tal que $U := f^{-1}(V)$ é um aberto afim e $f|_U : U \to V$ é um morfismo finito de conjuntos algébricos afins.

Do mesmo modo que para fechados afins, se f é finito então para cada $y \in Y$ o conjunto $f^{-1}(y)$ é finito e não-vazio. Em particular, f é sobrejetora.

Um importante exemplo de morfismo finito é a projeção com centro em um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um fechado projetivo e E um *subespaço linear de* $\mathbb{P}^n$, isto é, E é um fechado de $\mathbb{P}^n$ definido por polinômios homogêneos de grau 1. Tomamos E disjunto de X, isto é, $E \cap X = \emptyset$. Suponha que E é dado por $n - d$ equações linearmente independentes

$$L_0 = \ldots = L_{n-d-1} = 0$$

(intuitivamente, E tem dimensão d). Em particular, um ponto $x = (a_0 : \ldots : a_n)$ é um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ definido por $n-1$ equações, de fato, se $x \in \mathbb{A}^n_j$ então x é definido por $a_iT_j - a_jT_i$ onde $i = 0, \ldots, n$, $i \neq j$. A *projeção com centro em E* é o mapa racional

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{n-d-1} \\ x & \mapsto & \pi(x) = (L_0(x) : \ldots : L_{n-d-1}(x)). \end{array}$$

que é regular no aberto $\mathbb{P}^n - E$ de $\mathbb{P}^n$. Como X é disjunto de E, então π está definido em X e obtemos um morfismo $X \to \mathbb{P}^{n-d-1}$.

Teorema 3.8 *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ fechado e E um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ disjunto de X. Então a projeção com centro em E define um mapa finito $\pi : X \to \pi(X)$.*

Demonstração. Suponha que E é dado por equações $L_0, \ldots, L_{n-d-1}$ como acima. Se $y_0, \ldots, y_{n-d-1}$ são as coordenadas de $\mathbb{P}^{n-d-1}$, então $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$ é dado por $y_j = L_j(x)$. Então $U_i := \pi^{-1}(\mathbb{A}^{n-d-1}_i) \cap X$ é o aberto afim dado pela condição $L_i \neq 0$, isto é, $U_i = X_{L_i}$. Mostraremos que para cada i

$$\pi : U_i \to \mathbb{A}^{n-d-1}_i \cap \pi(X)$$

é um morfismo finito.

Lembre que $k[U_i] = k[X][1/L_i]$ pelo Lema 2.20. Tome $g \in k[U_i]$, digamos $g = g'/L_i^m$ com $g' \in k[X]$. Vamos mostrar que g é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em $k[\mathbb{A}^{n-d-1}_i \cap \pi(X)]$. Considere o mapa $\pi_1 : X \to \mathbb{P}^{n-d}$ dado por

$$\pi_1(x) = (L_0(x)^m : \ldots : L_{n-d-1}(x)^m : g'(x)).$$

É claro que π_1 é um morfismo e, como X é um fechado projetivo, pela Proposição 2.14, $\pi_1(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^{n-d}$. Suponha que $\pi_1(X)$ é dado por equações $F_1 = \ldots = F_s = 0$, onde $F_1, \ldots, F_s \in k[S_0, \ldots, S_{n-d}]$.

Note que o ponto $(0 : \ldots : 0 : 1) \in \mathbb{P}^{n-d}$ não está em $\pi_1(X)$ pois, caso contrário, $L_0, \ldots, L_{n-d-1}$ teriam um zero em comum em X, o que não ocorre pois X é disjunto de E. Isto significa que as equações

$$S_0 = \ldots = S_{n-d-1} = F_1 = \ldots = F_s = 0$$

não têm solução em $\mathbb{P}^{n-d}$. Logo, pelo Teorema Fraco dos Zeros (Corolário 2.2), temos uma continência de ideais

$$\langle S_0, \ldots, S_{n-d-1}, F_1, \ldots, F_s \rangle \supset \langle S_0^k, \ldots, S_{n-d}^k \rangle$$

para algum $k \geq 0$. Em particular, S_{n-d}^k se escreve como

$$S_{n-d}^k = \sum_{j=0}^{n-d-1} S_j H_j + \sum_{j=1}^{s} F_j P_j$$

com $H_j, P_j \in k[S_0, \ldots, S_{n-d}]$. Assim, em $\pi_1(X)$ temos $F_j = 0$ para todo j e logo

$$S_{n-d}^k = \sum_{j=0}^{n-d-1} S_j H_j.$$

Seja $H_j^{(l)}$ a componente homogênea de grau l de H_j. Então o polinômio homogêneo de grau k

$$\Phi(S_0, \ldots, S_{n-d}) := S_{n-d}^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} S_j H_j^{(k-1)}$$

é identicamente nulo em $\pi_1(X)$. Note que, visto como polinômio em S_{n-d}, Φ é mônico e podemos escrever

$$\Phi = S_{n-d}^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} A_{k-j}(S_0, \ldots, S_{n-d-1}) S_{n-d}^j$$

com A_{k-j} homogêneo de grau $k-j$. Substituindo $S_j = L_j^m$ para $j = 0, \ldots, n-d-1$ e $S_{n-d} = g'$, temos

$$(g')^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} A_{k-j}(L_0^m, \ldots, L_{n-d-1}^m)(g')^j = 0.$$

Como A_{k-j} é homogêneo, dividindo por L_i^{mk}, obtemos

$$g^k - \sum_{j=0}^{n-d-1} A_{k-j}\left(\frac{L_0^m}{L_i^m}, \ldots, \frac{L_{n-d-1}^m}{L_i^m}\right) g^j = 0$$

e, como L_j/L_i é regular em $\mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)$ para cada j, obtemos então que g é inteiro sobre $k[\mathbb{A}_i^{n-d-1} \cap \pi(X)]$. $\square$

Corolário 3.9 *Sejam $F_0, \ldots, F_m \in k[T_0, \ldots, T_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau sem zeros comuns em um fechado $X \subset \mathbb{P}^n$. Então*

$$\varphi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$$

define um morfismo finito $\varphi : X \to \varphi(X)$.

Demonstração. Seja d o grau dos polinômios F_i e considere o mergulho de Veronese

$$\nu = \nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$$

com $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Sejam $L_0, \ldots, L_m$ os polinômios homogêneos de grau 1 correspondendo a $F_0, \ldots, F_m$ via ν. Tomando π a projeção definida por $L_0, \ldots, L_m$, temos que $\varphi(x) = \pi(\nu(x))$. Como ν é um isomorfismo sobre sua imagem, então é finita. Assim φ é finita, por ser composição de morfismos finitos. $\square$

Teorema 3.10 (Normalização de Noether) *Seja X um conjunto algébrico projetivo (resp. afim). Então existe morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ (resp. $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$) para algum m.*

Demonstração. Faremos primeiro o caso projetivo. Tome $X \subset \mathbb{P}^n$ um fechado. Se $X = \mathbb{P}^n$, então basta tomar φ a identidade. Caso contrário, existe $x \in \mathbb{P}^n - X$. Seja φ' a projeção com centro em x. Então φ' está definida em X e $\varphi' : X \to \varphi'(X)$ é finito pelo Teorema 3.8. Além disso, a imagem $\varphi'(X) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é um fechado projetivo (pela Proposição 2.14). Assim, se $\varphi'(X) \neq \mathbb{P}^{n-1}$, podemos repetir o argumento anterior. Como composição de morfismos finitos é finito, finalmente obteremos um morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ para algum $m \leq n$.

Agora considere $X \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Se $X = \mathbb{A}^n$ então a identidade é o morfismo procurado. Caso contrário, considere $X \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_0 \subset \mathbb{P}^n$ e tome $\overline{X}$ o fecho projetivo de X em $\mathbb{P}^n$. Seja $x \in \mathbb{P}^n - \overline{X}$ um ponto no infinito, isto é, tal que $x \notin \mathbb{A}^n_0$. Considere a projeção $\varphi' : \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$ com centro em x. Vejamos que $\varphi'(X)$ está no aberto $\mathbb{A}^{n-1}_0$ dos pontos finitos de $\mathbb{P}^{n-1}$.

Como $x \notin \mathbb{A}^n_0$ então x é da forma $x = (0 : a_1 : \ldots : a_n)$. Suponha sem perda de generalidade que $a_1 \neq 0$, então x é dado pelas n equações

$$T_0,\, a_1T_2 - a_2T_1, \ldots,\, a_1T_n - a_nT_1.$$

Assim,

$$\varphi'(x) = (x_0 : a_1x_2 - a_2x_1 : \ldots : a_1x_n - a_nx_1)$$

e logo $\varphi'(\mathbb{A}^n_0) \subset \mathbb{A}^{n-1}_0$. Em particular, $\varphi'(X) \subset \mathbb{A}^{n-1}_0$. Se $\varphi'(X) = \mathbb{A}^{n-1}_0$ então pronto, caso contrário, podemos repetir o argumento até obter o morfismo finito $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$. $\square$

Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito entre variedades afins. Então a inclusão $k[Y] \subset k[X]$ dada por f^* induz uma extensão de corpos $k(Y) \subset k(X)$. Esta extensão é finita. De fato, se $X \subset \mathbb{A}^n$ então $k(X) = k(t_1, \ldots, t_n)$ onde cada t_i é a imagem de T_i no quociente $k[X] = k[T_1, \ldots, T_n]/I(X)$. Mas f é finito e logo cada t_i é inteiro sobre $k[Y]$. Assim $k(X)$ é gerado por um número finito de elementos algébricos sobre $k(Y)$ e portanto a extensão $k(X)|k(Y)$ é finita. Definimos o *grau f* como o grau da extensão

$$\deg(f) = [k(X) : k(Y)].$$

Exemplo. Considere o morfismo de $X = \mathbb{A}^1 = \{t \in k\}$ em $Y = \mathbb{A}^1 = \{s \in k\}$ dado por

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ t &\mapsto s = t^2. \end{aligned}$$

Primeiro vejamos que f é finito. É óbvio que é dominante. Além disso, o mapa de pullback é

$$\begin{aligned} f^* : k[Y] = k[S] &\rightarrow k[X] = k[T] \\ S &\mapsto T^2. \end{aligned}$$

Assim, via f^*, temos $S = T^2$ e logo $k[T^2] = k[Y] \subset k[X] = k[T]$. É claro que T é inteiro sobre $k[Y]$, já que é raiz do polinômio mônico $p(\lambda) = \lambda^2 - T^2$ com coeficientes em $k[Y]$. Então f é finito.

Agora vamos calcular o grau de f. Temos

$$k(Y) = k(T^2) \quad \text{e} \quad k(X) = k(T)$$

e logo o grau da extensão $k(X)|k(Y)$ é 2, já que o gerador T de $k(X)$ é raiz do polinômio $p(\lambda)$ de grau 2. Assim $\deg(f) = 2$. Note que para cada $s \in Y$ existem no máximo dois elementos em $f^{-1}(s)$. Além disso, se $char(k) \neq 2$, então $f^{-1}(s)$ possui exatamente dois elementos para todo $s \in Y - \{0\}$.

Definição. Um fechado afim X é dito *normal* se $k[X]$ é integralmente fechado, isto é, se $k[X]$ contém todo elemento de seu corpo de frações que é inteiro sobre $k[X]$.

Exemplo. 1 - Vejamos que $\mathbb{A}^n$ é normal. Precisamos mostrar que $k[T_1, \ldots, T_n]$ é integralmente fechado. Tome $f = g/h \in k(T_1, \ldots, T_n)$ inteiro sobre $k[T_1, \ldots, T_n]$. Como $k[T_1, \ldots, T_n]$ é um domínio de fatoração única, podemos supor que g e h não têm fator comum não constante. Como f é inteiro sobre $k[T_1, \ldots, T_n]$, então

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

com $a_1, \ldots, a_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Multiplicando por h^n, temos

$$g^n + a_1 g^{n-1} h + \ldots + a_n h^n = 0,$$

ou seja,

$$g^n + h(a_1 g^{n-1} + \ldots + a_n h^{n-1}) = 0.$$

Mas isto implica que h divide g^n e como g e h não têm fator comum não constante, h deve ser constante. Assim $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$. (Note que mostramos que todo domínio de fatoração única é integralmente fechado. Este fato está demonstrado novamente no Lema 6.8.)

2 - Tome $X = Z(T_2^2 - T_1^3 - T_1^2) \subset \mathbb{A}^2$. Então X não é normal. De fato, considere $f = T_2/T_1$ no corpo de frações $k(X)$ de $k[X] = k[T_1, T_2]/\langle T_2^2 - T_1^3 - T_1^2\rangle$. Vamos ver que f é inteira sobre $k[X]$. De fato, temos

$$f^2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{T_1^3 + T_1^2}{T_1^2}$$

implicando que $T_1^2(f^2 - (T_1 + 1)) = 0$. Assim, como T_1 não é um divisor de zeros em $k[X]$ (na verdade $k[X]$ é domínio), temos $f^2 - (T_1 + 1) = 0$ e f é inteira sobre $k[X]$. Mas $f \notin k[X]$, pois não é regular no ponto $(0, 0) \in X$.

Proposição 3.11 *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito de variedades afins com Y normal. Então para cada $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ tem no máximo $\deg(f)$ elementos.*

Demonstração. Seja $n = \deg(f)$ e

$$\begin{array}{rcl} A := k[X] & \subset & k(X) =: L \\ B := k[Y] & \subset & k(Y) =: K. \end{array}$$

Então $[K : L] = n$. Como Y é normal, então B é integralmente fechado. Como f é finito, então pelo Lema 3.1, A é um B-módulo finitamente gerado. Assim, (cf. Atiyah-Macdonald prop 5.15) para todo $a \in A$, os coeficientes do polinômio mínimo de a sobre L estão em B.

Sejam $x_1, \dots, x_m$ os elementos de $f^{-1}(y)$. Escolha $a \in A$ tomando valores distintos em $x_1, \dots, x_m$. (É fácil ver que tal elemento existe. Se $X \subset \mathbb{A}^N$, basta tomar um polinômio em $k[T_0, \dots, T_N]$ com esta propriedade.) Seja $F \in B[T]$ o polinômio mínimo de a sobre L. Então $\deg(F) \leq [K : L] = n$.

Seja $\overline{F}(T)$ o polinômio obtido substituindo os coeficientes de F por seus valores em y. Então $a(x_1), \dots, a(x_n)$ são raízes de $\overline{F}$ e logo

$$m \leq \deg(\overline{F}) \leq \deg(F) \leq n,$$

ou seja, o número de elementos de $f^{-1}(y)$ é no máximo $n = \deg(f)$. □

Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito de variedades afins com Y normal, como no teorema. Dizemos que um ponto $y \in Y$ é um *ponto de ramificação* de f ou que f é *ramificado sobre* y se a cardinalidade de $f^{-1}(y)$ é menor que $\deg(f)$. Caso contrário, dizemos que f é *não-ramificado sobre* y.

Exemplo. 1 - Se $char(k) \neq 2$, então morfismo finito

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^1 & \to & \mathbb{A}^1 \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$$

tem um único ponto de ramificação que é $t = 0$. Se $char(k) = 2$ então f é ramificada sobre todo ponto de $\mathbb{A}^1$.

2 - Considere $X = Z(T_2^2 - T_1^2 - T_1^3) \subset \mathbb{A}^2$. Já vimos que X não é normal. Considere o morfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to X \\ t &\mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)). \end{aligned}$$

Então f é finito com grau 1 (exercício), mas $f^{-1}(0, 0) = \{\pm 1\}$.

Proposição 3.12 *Seja $f : X \to Y$ um morfismo finito entre variedades afins. Suponha que Y é normal. O conjunto dos pontos de Y sobre os quais f é não-ramificada é um aberto de Y. Além disso, se a extensão de corpos $k(X)|k(Y)$ for separável, então este conjunto é não-vazio.*

Demonstração. Vamos usar a notação introduzida na prova da Proposição 3.11. Se f é não-ramificada sobre y então $\deg(\overline{F}) = \deg(F) = n$ e $\overline{F}$ tem n raízes distintas. Seja $D(F)$ o discriminante de F, isto é, a resultante entre F e sua derivada. Temos que $D(\overline{F}) = D(F)(y) \neq 0$ se e somente se y é ponto de não-ramificação de f. Assim, o conjunto dos pontos sobre os quais f é não-ramificada é aberto, já que para y' numa vizinhança suficientemente pequena de y em Y, temos ainda que $D(F)(y') \neq 0$ e o elemento $a \in A$ escolhido ainda separa os pontos de $f^{-1}(y')$.

Agora suponha que a extensão $k(X)|k(Y)$ é separável. Tome $a \in A$ um elemento primitivo desta extensão e seja F seu polinômio mínimo. Então $\deg(F) = n = \deg(f)$ e F não tem raízes múltiplas, ou seja, $D(F)(y)$ não é identicamente nulo. Assim existe $y \in Y$ tal que $D(F)(y) \neq 0$, mostrando que o conjunto dos pontos onde f é não-ramificado é não-vazio. □

Um morfismo finito $f : X \to Y$ tal que a extensão $k(X)|k(Y)$ é separável é chamado um *morfismo separável*. Note que, em característica zero, todo morfismo finito é separável. A hipótese de f ser separável no teorema é uma hipótese necessária. De fato, para $char(k) = p > 0$, o *morfismo de Frobenius*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to \mathbb{A}^1 \\ t &\mapsto t^p \end{aligned}$$

é finito de grau p (exercício) mas $f^{-1}(t) = \{t\}$ para todo $t \in \mathbb{A}^1$, ou seja, todo ponto é de ramificação.

Definição. Seja X uma variedade afim. Uma *normalização* de X é um morfismo finito birracional $\nu : X^\nu \to X$ onde X^ν é normal.

Obs. A normalização de Noether feita no Teorema 3.10 não é uma normalização como definido acima.

Exemplo. Já vimos que $X = Z(T_2^2 - T_1^2 - T_1^3) \subset \mathbb{A}^2$ não é normal. O morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^1 & \to & X \\ t & \mapsto & (t^2-1, t(t^2-1)) \end{array}$$

é uma normalização de X. De fato, $\mathbb{A}^1$ é normal, f é finito e é birracional com inversa racional

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2/x_1 \end{array}$$

definida em $X - \{(0,0)\}$.

Teorema 3.13 *Seja X uma variedade afim. Então X possui uma normalização $\nu : X^\nu \to X$. Além disso, ν satisfaz a seguinte propriedade universal. Se $f : Y \to X$ é um morfismo dominante de variedades afins com Y normal, então existe $g : Y \to X^\nu$ tal que $f = \nu \circ g$.*

Demonstração. Seja $A = k[X]$ e $\overline{A}$ seu fecho inteiro. Como pela Proposição 2.18, $k(X)$ é o corpo de frações de $k[X]$, então

$$\overline{A} = \{f \in k(X) \mid f \text{ é inteiro sobre } A\}.$$

Então $\overline{A}$ é finitamente gerado como k-álgebra. Para ver isso, considere um morfismo de normalização de Noether (Teorema 3.10) $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$. Então φ é finito e via φ^* temos

$$k[\mathbb{A}^m] = k[T_1, \ldots, T_m] \subset A = k[X]$$

com A inteiro sobre $k[T_1, \ldots, T_m]$. Logo, temos

$$\begin{array}{ccccc} k(T_1, \ldots, T_m) = L & \subset & k(X) & = & K \\ \bigcup & & & & \bigcup \\ k[T_1, \ldots, T_m] = B & \subset & A & \subset & \overline{A} \end{array}$$

onde L é o corpo de frações de B, e K é o corpo de frações de A e de $\overline{A}$. Note que, como A é inteiro sobre B, então $\overline{A}$ é o fecho inteiro de B em K. Além disso, como φ é finito, a extensão de corpos $K|L$ é finita. Então (veja Atyiah-Macdonald prop. 5.17), $\overline{A}$ é finitamente gerado como B-álgebra e, como B é finitamente gerado como k-álgebra, então $\overline{A}$ é finitamente gerado como k-álgebra.

Supomos então que $\overline{A}$ é gerado por n elementos $s_1, \ldots, s_n$ e podemos escrever

$$\overline{A} \cong k[S_1, \ldots, S_n]/I$$

onde I é um ideal de $k[S_1, \ldots, S_n]$ e, para cada i, s_i é a imagem de S_i no quociente. Seja $X^\nu = Z(I) \subset \mathbb{A}^n$. Então $k[X^\nu] \cong \overline{A}$ é integralmente fechado e logo X^ν é normal. Pelo Teorema 1.17, a inclusão

$$k[X] = A \hookrightarrow \overline{A} = k[X^\nu]$$

induz um morfismo $\nu : X^\nu \to X$. Note que ν é birracional já que o corpo de frações de um anel e de seu fecho inteiro é o mesmo. Além disso, ν é finito por definição. Assim ν é uma normalização de X.

Agora falta mostrar a propriedade universal. Tome $f : Y \to X$ morfismo dominante com Y normal. Então $k[Y]$ é integralmente fechado e f induz um homomorfismo injetor

$$f^* : A \hookrightarrow k[Y].$$

Ora, $\overline{A}$ é o menor anel integralmente fechado contendo A e logo f^* se fatora como

$$f^* : A \hookrightarrow \overline{A} \hookrightarrow k[Y],$$

o que implica que f se fatora como

$$f : Y \xrightarrow{g} X^\nu \xrightarrow{\nu} X.$$

□

Obs. Segue da propriedade universal que a normalização é única a menos de isomorfismo.

4 Dimensão

Seja X uma variedade quasi-projetiva. Vamos definir a dimensão de X. Para isso lembre que pelo Corolário 2.19, $k(X)$ é um corpo contendo k, isto é, é uma extensão de k. A *dimensão* de X é então o grau de transcendência desta extensão

$$\dim(X) = \operatorname{trdeg}(k(X)|k).$$

Convencionamos tomar $\dim(\emptyset) = -1$.

Lema 4.1 *(a) Se Xé uma variedade quasi-projetiva e $U \subset X$ é um aberto, então* $\dim(X) = \dim(U)$*;*

(b) $\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(\mathbb{P}^n) = n$*;*

(c) Se $f : X \to Y$ é um morfismo finito entre variedades quasi-projetivas, então $\dim(X) = \dim(Y)$*. Em particular se $X \cong Y$ então* $\dim(X) = \dim(Y)$*.*

Demonstração. (a) Óbvio pois $k(X) = k(U)$.

(b) Temos $k(\mathbb{A}^n) = k(T_1, \ldots, T_n)$ e logo $\mathrm{trdeg}(k(\mathbb{A}^n)|k) = n$. Assim $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ e, por (a), temos também $\dim(\mathbb{P}^n) = n$.

(c) Como f é finito, então a extensão de corpos $k(X)|k(Y)$ induzida por f é algébrica. Assim $k \subset k(Y) \subset k(X)$ e

$$\dim(X) = \mathrm{trdeg}(k(X)|k) = \mathrm{trdeg}(k(Y)|k) = \dim(Y).$$

Por último, basta notar que todo isomorfismo é um morfismo finito. $\square$

Exemplo. 1 - Tome $X = \{x\}$ consistindo de um único ponto. Então $k(X) = k[X] = k$ e logo $\dim(X) = 0$. Reciprocamente, suponha que X é uma variedade com $\dim(X) = 0$. Tomando $U \subset X$ aberto afim, temos $\dim(X) = \dim(U)$ e podemos supor que X é afim, ou melhor, que $X \subset \mathbb{A}^n$ é um fechado irredutível. Sejam $t_1, \ldots, t_n$ as imagens em $k[X]$ de $T_1, \ldots, T_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Por hipótese, todo t_i é algébrico sobre k, logo é raiz de um polinômio com coeficientes em k. Assim, cada t_i assume apenas um número finito de valores em X e logo X é finito. Como X é irredutível, então X consiste de um único ponto.

2 - Seja $f(T_1, T_2) \subset k[T_1, T_2]$ um polinômio não-constante. Seja $X = Z(f) \subset \mathbb{A}^2$. Vejamos que $\dim(X) = 1$. Temos $k[X] = k[T_1, T_2]/\langle f \rangle$ e logo

$$\dim(X) = \mathrm{trdeg}(k(X)|k) < \mathrm{trdeg}(k(T_1, T_2)|k) = 2$$

já que em $k(X)$ os geradores T_1 e T_2 obedecem a uma relação algébrica f. Por outro lado, $\dim(X) \geq 1$ pelo exemplo anterior, pois X não é finito (exercício). Assim $\dim(X) = 1$.

Dizemos que um conjunto algébrico quasi-projetivo de dimensão 1 é uma *curva.* Do mesmo modo, um conjunto algébrico quasi-projetivo de dimensão 2 é uma *superfície.*

Proposição 4.2 *Sejam X e Y variedades quasi-projetivas. Então*

$$\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y).$$

Demonstração. Pelo Lema 4.1, passando a abertos afins de X e Y, podemos supor que $X \subset \mathbb{A}^N$ e $Y \subset \mathbb{A}^M$. Sejam $n = \dim(X)$ e $m = \dim(Y)$. Tome $t_1, \ldots, t_N \in k[X]$ (resp. $s_1, \ldots, s_M \in k[Y]$) as imagens de $T_1, \ldots, T_N \in k[T_1, \ldots, T_n]$ (resp. $S_1, \ldots, S_M \in k[S_1, \ldots, S_M]$) no quociente $k[X]$ (resp. $k[Y]$). Podemos supor sem perda de generalidade que $t_1, \ldots, t_n$ (resp. $s_1, \ldots, s_m$) são algebricamente independentes sobre k. Então $k[X \times Y]$ é gerado por $t_1, \ldots, t_N, s_1, \ldots, s_M$

algebricamente dependentes de $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m$. Basta então vermos que $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m$ são algebricamente independentes sobre k.

Suponha que existe polinômio F com coeficientes em k tal que

$$F(t, s) = F(t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m) = 0. \tag{10}$$

Escreva

$$F(T, S) = \sum_{e_1, \ldots, e_m} a_{e_1, \ldots, e_m}(T_1, \ldots, T_n) S_1^{e_1} \cdots S_m^{e_m}. \tag{11}$$

Então para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ temos $F(x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_m) = 0$ em Y por (10). Mas como $s_1, \ldots, s_m$ são algebricamente independentes, por (11) isto implica que

$$a_{e_1, \ldots, e_m}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

para todo $e_1, \ldots, e_m$. Mas isto vale para todo $x \in X$, implicando que

$$a_{e_1, \ldots, e_m}(t_1, \ldots, t_n) = 0$$

para todo $e_1, \ldots, e_m$. Agora, como $t_1, \ldots, t_n$ são algebricamente independentes, temos que cada $a_{e_1, \ldots, e_n}$ deve ser identicamente nulo. Assim $F(T, S)$ é identicamente nulo e $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m$ são algebricamente independentes sobre k. $\square$

Proposição 4.3 *Sejam $Y \subset X$ variedades quasi-projetivas. Então* $\dim(Y) \leq \dim(X)$*. Além disso, se* $\dim(Y) = \dim(X)$ *então* $Y = X$*.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1, basta considerar $Y \subset X \subset \mathbb{A}^N$ fechados irredutíveis. Tome $n = \dim(X)$. Sejam $t_1, \ldots, t_N$ as imagens de $T_1, \ldots, T_N \in k[T_1, \ldots, T_n]$ no quociente $k[X]$. Então quaisquer $n + 1$ das t_i são algebricamente dependentes em $k[X]$. Logo, como $k[Y]$ é quociente de $k[X]$, também quaisquer $n+1$ das (imagens de) t_i em $k[Y]$ são algebricamente dependentes. Assim $\mathrm{trdeg}(k(Y)|k) \leq n$.

Agora suponha que $\dim(Y) = \dim(X) = n$. Podemos supor sem perda de generalidade que $t_1, \ldots, t_n$ são algebricamente independentes em $k[X]$. Tome $u \in k[X]$ não-nulo. Então $u, t_1, \ldots, t_n$ são algebricamente dependentes e existe um polinômio $F(T_1, \ldots, T_n, U)$ com coeficientes em k tal que $F(t_1, \ldots, t_n, u) = 0$. Escreva

$$0 = F(t_1, \ldots, t_n, u) = a_0(t_1, \ldots, t_n)u^k + \ldots + a_{k-1}(t_1, \ldots, t_n)u + a_k(t_1, \ldots, t_n) \tag{12}$$

Tomando F irredutível, temos $a_k(T_1, \ldots, T_n)$ não-nulo. Agora, suponha que (a imagem de) u é nulo em Y. Então por (12) temos que $a_k(t_1, \ldots, t_n) = 0$ em Y, implicando que $t_1, \ldots, t_n$ são algebricamente dependentes em $k[Y]$, o que não ocorre. Portanto $u \neq 0$ em Y. Mas então $X = Y$ pois caso contrário existiria $u \in k[X]$ identicamente nulo em Y mas não em X. De fato, basta tomar $u \in I_X(Y)$. $\square$

Definição. Seja Xum conjunto algébrico quasi-projetivo e seja $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ sua decomposição em componentes irredutíveis. Definimos a *dimensão de* X como

$$\dim(X) = \max_{1 \leq i \leq n} \dim(X_i).$$

É fácil mostrar (exercício) que a proposição anterior ainda vale, isto é, se X e Y são conjuntos algébrico quasi-projetivos com $X \subset Y$ fechado, então temos $\dim(X) \leq \dim(Y)$. Dizemos que $\dim(X) - \dim(Y)$ é a *codimensão de* Y *em* X. Deste modo, a codimensão é sempre não-negativa. Mais ainda, se Y é irredutível e $\dim(X) = \dim(Y)$ então $X = Y$.

Exemplo. Tome $X = Z(T_1T_3, T_2T_3) \subset \mathbb{A}^3$. Vamos achar a dimensão de X. Para isso, note primeiro que $X = X_1 \cup X_2$, onde

$$X_1 = Z(T_1, T_2) \quad \text{e} \quad X_2 = Z(T_3)$$

são as componentes irredutíveis de X. Agora note que $\dim(X_1) = 1$, já que temos isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\sim} & X_1 \\ t & \mapsto & (0, 0, t); \end{array}$$

e que $\dim(X_2) = 2$ já que temos isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^2 & \xrightarrow{\sim} & X_2 \\ (t_1, t_2) & \mapsto & (t_1, t_2, 0). \end{array}$$

Assim

$$\dim(X) = \max\{\dim(X_1), \dim(X_2)\} = \max\{1, 2\} = 2.$$

Vamos ver uma caracterização mais geométrica de dimensão usando o teorema a seguir.

Teorema 4.4 (Teorema do Ideal Principal de Krull - versão projetiva) *Seja* $X \subset \mathbb{P}^N$ *uma variedade projetiva e seja* $F \in k[T_0, \dots, T_N]$ *um polinômio homogêneo não-identicamente nulo em* X. *Considere*

$$Y = X \cap Z_p(F) = \{x \in X \mid F(x) = 0\}.$$

Então $\dim(Y) = \dim(X) - 1$.

Demonstração. Como F é nulo em Y mas não em X, temos $Y \subset X$. Logo, pela Proposição 4.3, $\dim(Y) < \dim(X)$. Tome $X^{(1)} = Y$ e escolha um polinômio $F_1 \in k[T_0, \dots, T_N]$ de mesmo grau que F que não seja identicamente nulo em nenhuma componente irredutível de $X^{(1)}$. (É fácil encontrar tal polinômio. Basta tomar pontos em cada componente irredutível de $X^{(1)}$ e tomar um polinômio que não se anula nestes pontos.)

Tome $X^{(2)} = X^{(1)} \cap Z_p(F_1)$. Novamente $\dim(X^{(2)}) < \dim(X^{(1)})$. Procedendo deste modo, obtemos uma cadeia

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \dots$$

com $\dim(X^{(i+1)}) < \dim(X^{(i)})$. Como $\dim(X) = n$, então $X^{(n+1)} = \emptyset$. Agora, se $\dim(X^{(1)}) < n-1$, então $X^{(n)} = \emptyset$. Note que

$$X^{(n)} = X \cap Z_p(F) \cap Z_p(F_1) \cap \dots \cap Z_p(F_{n-1}),$$

e portanto $F, F_1, \dots, F_n$ não têm zeros em comum em X. Como estes polinômios têm o mesmo grau, pelo Corolário 3.9, o morfismo

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ x & \mapsto & (F(x) : F_1(x) : \dots : F_{n-1}(x)) \end{array}$$

é finito. Mas então pelo Lema 4.1 (c) temos $\dim(X) = n - 1$, um absurdo. Assim $\dim(X^{(1)}) = \dim(Y) = n - 1$. □

Obs. 1 - Vimos na prova do teorema que $X^{(n)} = \emptyset$, e portanto os polinômios $F = F_0, F_1, \dots, F_n$ não têm zeros em comum. Assim, como estes polinômios têm o mesmo grau, pelo Corolário 3.9, obtemos um morfismo finito $\varphi = (F_0 : \dots : F_n) : X \to \varphi(X) \subset \mathbb{P}^n$. Mas, como $\varphi(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^n$ e tem dimensão n, pela Proposição 4.3 temos $\varphi(X) = \mathbb{P}^n$. Assim, obtemos um morfismo finito

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X & \to & \mathbb{P}^n \\ x & \mapsto & (F_0(x) : F_1(x) : \dots : F_n(x)). \end{array}$$

Este morfismo será usado na prova do Teorema 4.7.

2 - O teorema anterior diz que se $X \subset \mathbb{P}^N$ é uma variedade projetiva, então cada hipersuperfície de $\mathbb{P}^N$ contém X ou corta X em um conjunto com uma dimensão a menos que X. Em particular, duas hipersuperfícies de $\mathbb{P}^N$ sempre se interceptam. Note que isto não vale no caso afim. De fato $X = Z(T_1) \subset \mathbb{A}^2$ e $X' = Z(T_1 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ não se interceptam.

3 - Na prova do teorema mostramos que uma variedade projetiva X contém subvariedades de quaisquer dimensão $s < \dim(X)$. Mais ainda, para $s < \dim(X)$, s polinômios homogêneos têm sempre zeros em comum em X.

Corolário 4.5 *Seja X um conjunto algébrico projetivo.*

(a) Se X é irredutível, então $\dim(X) = 1 + \max \dim(Y)$ *onde Y percorre os fechados próprios de X;*

(b) $\dim(X)$ *é o maior inteiro n para o qual existe cadeia*

$$\emptyset \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_n \subset X$$

de subvariedades de X.

Obs. O corolário nos dá duas definições geométricas de dimensão equivalentes à definição algébrica dada anteriormente. Veremos no Corolário 4.9 que estas caracterizações também valem para conjuntos algébricos quasi-projetivos.

A definição dada em (a) é uma definição recursiva. Deste modo, por exemplo, podemos caracterizar as superfícies irredutíveis como as variedades que têm apenas curvas e pontos como fechados próprios. A formulação dada em (b) é a definição topológica de dimensão, ou seja, é a definição usada em espaços topológicos em geral.

Teorema 4.6 *Toda componente irredutível de uma hipersuperfície em $\mathbb{A}^n$ ou $\mathbb{P}^n$ tem dimensão $n-1$. Reciprocamente, se X é um fechado em $\mathbb{A}^n$ ou $\mathbb{P}^n$ cujas componentes irredutíveis têm dimensão $n-1$, então X é uma hipersuperfície.*

Demonstração. Para a primeira parte note que, como $\mathbb{A}^n_0 = \mathbb{A}^n$ é um aberto denso de $\mathbb{P}^n$, se X é fechado em $\mathbb{P}^n$ então $X \cap \mathbb{A}^n_0$ é fechado em $\mathbb{A}^n_0$ e $\dim(X) = \dim(X \cap \mathbb{A}^n_0)$. Assim basta considerar o caso afim. Tome então $X \subset \mathbb{A}^n$ dado por $X = Z(F)$ em $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$. A fatoração de F em polinômios irredutíveis $F = F_1 \cdots F_r$ corresponde a uma decomposição de X em componentes irredutíveis $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ onde $X_i = Z(F_i)$. Precisamos ver que $\dim(X_i) = n - 1$.

Suponha sem perda de generalidade que a variável T_n aparece no polinômio F_i. Sejam $t_1, \ldots, t_n$ as imagens de $T_1, \ldots, T_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$ em $k[X_i]$. Note que t_n é algebricamente dependente de

$t_1, \ldots, t_{n-1}$. Agora, se $t_1, \ldots, t_{n-1}$ forem algebricamente dependentes, então $G(t_1, \ldots, t_{n-1}) = 0$ para algum polinômio G com coeficientes em k. Mas então $G = 0$ em $k[X_i]$, o que implica que $G \in \sqrt{\langle F_i \rangle}$, isto é, G^l é múltiplo de F_i para algum $l \geq 1$. Mas isto é impossível, pois a variável T_n não aparece em G mas aparece em F_i. Assim $\dim(X_i) \geq n - 1$ e como $X_i \neq \mathbb{A}^n$, temos $\dim(X_i) = n - 1$.

Agora vamos mostrar a segunda parte. Basta considerar o caso em que X é irredutível. De fato, se $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ com $I(X_i) = \langle F_i \rangle$, então $I(X) = \langle F_1 \cdots F_r \rangle$. Como $X \neq \mathbb{A}^n$ (resp $X \neq \mathbb{P}^n$), então existe um poilinômio $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ (resp. polinômio homogêneo $F \in k[T_0, \ldots, T_n]$) não identicamente nulo que se anula em X. Como X é irredutível, então algum fator irredutível G de F deve ser nulo em X. Tome $Y = Z(G)$ (resp. $Y = Z_p(G)$). Então Y é uma hipersuperfíce irredutível de $\mathbb{A}^n$ (resp. $\mathbb{P}^n$) contendo X. Mas $\dim(X) = \dim(Y)$ pela primeira parte e, pela Proposição 4.3, temos $X = Y$. $\square$

Obs. Vejamos que $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ não são isomorfos. Primeiro note que $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ têm ambos dimensão 2 e logo, pelo Teorema 4.4, as hipersuperfícies de $\mathbb{P}^2$ e de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ são curvas. Além disso, pelo Teorema 4.6, toda curva em $\mathbb{P}^2$ é uma hipersuperfície. É fácil ver que as curvas

$$X = \mathbb{P}^1 \times \{(0:1)\} \quad \text{e} \quad Y = \mathbb{P}^1 \times \{(1:0)\}$$

de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ não se interceptam. Se $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ fosse isomorfo a $\mathbb{P}^2$, então X e Y corresponderiam a curvas X' e Y' de $\mathbb{P}^2$ que não se interceptam. Mas isto é impossível pois, pelo Teorema 4.4, quaisquer duas curvas em $\mathbb{P}^2$ se interceptam.

Teorema 4.7 *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva e $F \in k[T_0, \ldots, T_N]$ um polinômio homogêneo não identicamente nulo em X. Tome $Y = X \cap Z_p(F)$. Então toda componente irredutível de Y tem dimensão* $\dim(X) - 1$.

Demonstração. Iremos usar as notações introduzidas na prova do Teorema 4.4, em particular o mapa finito

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{P}^n \\ x & \mapsto & (F_0(x) : F_1(x) : \ldots : F_n(x)) \end{array}$$

onde $n = \dim(X)$ e $F = F_0$. Para cada i tome $U_i = \varphi^{-1}(\mathbb{A}^n_i)$. Então $U_i = X_{F_i}$ é um aberto afim em X. Note que $Y \cap U_0 = \emptyset$. Basta então mostrar que cada componente de $U_i \cap Y$ tem dimensão $n - 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Para simplificar a notação tome $U = U_i$.

Agora, em U, temos que $F = 0$ se e somente se $f = 0$ onde $f = F/F_i \in k[U]$. Assim

$$Y \cap U = Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Da construção de φ temos que

$$\varphi|_U : U \to \mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_i$$

é dada por n funções regulares $f_1, \ldots, f_n \in k[U]$ com $f = f_1$. Precisamos mostrar que cada componente de $Z(f)$ tem dimensão $n-1$. Para isso mostraremos que $f_2, \ldots, f_n$ são algebricamente independentes em cada componente. Isso implicará que a dimensão de cada componente é $\geq n-1$, mas como já sabemos que esta dimensão é $\leq n-1$ pelo Teorema 4.4, obteremos que esta dimensão é igual a $n-1$.

Tome $P \in k[T_2, \ldots, T_n]$ e considere $R = P(f_2, \ldots, f_n) \in k[U]$. Seja $Z(f) = W_1 \cup \ldots \cup W_r$ a decomposição de $Z(f)$ em componentes irredutíveis e suponha sem perda de generalidade que $R = 0$ em W_1. Tome Q um polinômio que se anula em $W_2 \cup \ldots \cup W_r$ mas não em W_1. Então $RQ = 0$ em $Z(f)$. Mas, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (Teorema 1.7), temos que f divide $(RQ)^l$ para algum $l > 0$. Assim, pelo Lema 4.8, f divide Q^s para algum $s > 0$, o que significa que $Q = 0$ em $Z(f)$ contrariando a escolha de Q. Logo $R \neq 0$ em W_1, mostrando que $\dim(W_1) = n-1$.
$\square$

Lema 4.8 *Seja $B = k[T_1, \ldots, T_n]$ e $A \supset B$ um domínio que é inteiro sobre B. Seja $f = T_1$ e $R = P(T_2, \ldots, T_n) \neq 0$. Para qualquer $Q \in A$ temos que, se f divide $(RQ)^l$ em A para algum $l > 0$, então f divide Q^s em A para algum $s > 0$.*

Corolário 4.9 (Teorema do Ideal Principal de Krull - versão quasi-projetiva) *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade quasi-projetiva e F um polinômio não identicamente nulo em X. Seja $Y = X \cap Z_p(F)$. Se $Y \neq \emptyset$ então toda componente irredutível de Y tem dimensão* $\dim(X) - 1$.

Demonstração. Por definição, X é aberto em um fechado $\overline{X}$ de $\mathbb{P}^N$. Como X é irredutível, então $\overline{X}$ é irredutível e tem a mesma dimensão que X. Ora, pelo Teorema 4.7 temos que, se

$$\overline{X} \cap Z_p(F) = W_1 \cup \ldots \cup W_r$$

é a decomposição em componentes irredutíveis, então $\dim(W_i) = \dim(X) - 1$. Mas então

$$Y = (\overline{X} \cap Z_p(F)) \cap X = (W_1 \cap X) \cup \ldots \cup (W_r \cap X)$$

é a decomposição de Y em componentes irredutíveis, já que cada $W_i \cap X$ é irredutível e a decomposição é única. Ora, cada $W_i \cap X$ é ou vazio ou aberto em W_i (pois X é aberto em $\overline{X}$). Assim

$$\dim(W_i \cap X) = \dim(W_i) = \dim(X) - 1$$

se $W_i \cap X \neq \emptyset$. Ou seja, cada componente irredutível não vazia de Y tem dimensão $\dim(X) - 1$.
$\square$

Obs. 1 - Seja X uma variedade quasi-projetiva de dimensão n. Seja Y o conjunto dos zeros em X de m polinômios homogêneos. Se $Y \neq \emptyset$, então toda componente irredutível de Y tem dimensão $\geq n - m$. A prova deste fato são m aplicações sucessivas do Corolário 4.9.

2 - As caracterizações de dimensão dadas no Corolário 4.5 continuam válidas para conjuntos algébricos quasi-projetivos. De fato, basta notar que para qualquer conjunto algébrico quasi-projetivo X, sempre existe um polinômio F tal que $X \cap Z_p(F)$ é não-vazio.

Vamos agora enunciar sem demonstração um importante resultado que será usado na seção 5.3.

Teorema 4.10 (Teorema de dimensão das fibras) *Seja $f : Y \to X$ um morfismo sobrejetor de conjuntos algébricos quasi-projetivos irredutíveis. Então $s := \dim(Y) - \dim(X) \geq 0$ e*

(a) $\dim(Z) \geq s$ para toda componente irredutível Z de uma fibra $f^{-1}(x)$, onde $x \in X$;

(b) o conjunto dos x tais que $\dim(f^{-1}(x)) > s$ é um fechado próprio de X.

5 Pontos regulares e singulares

Vamos agora estudar propriedades locais de pontos de conjuntos algébricos quasi-projetivos X, isto é, propriedades de pontos $x \in X$ que não mudam quando trocamos X por uma vizinhança aberta de x em X. Como todo ponto tem uma vizinhança afim, podemos supor que X é afim.

5.1 Espaço tangente

Seja $X \subset \mathbb{A}^N$ um fechado afim e tome $x \in X$. O espaço tangente a X no ponto x será o conjunto dos pontos que estão em retas de $\mathbb{A}^N$ tangentes a X em x. Antes então precisamos definir a condição de tangência. Para isso, suponha que o sistema de coordenadas de $\mathbb{A}^N$ é escolhido de modo que $x = (0, \ldots, 0)$. As retas passando por x são da forma

$$L = \{at \,|\, t \in k\}$$

com $a \in \mathbb{A}^N - \{x\}$. Se X é dado por equações $F_1 = \ldots = F_m = 0$, então os pontos da interseção $X \cap L$ são dados por

$$F_1(at) = \ldots = F_m(at) = 0.$$

Tome $f(t)$ o máximo divisor comum de $F_1(at), \ldots, F_m(at)$. Note que, como $x \in L \cap X$ e x é dado por $t = 0$, então $t = 0$ é raiz de $f(t)$. A *multiplicidade de interseção da reta L com X em x* é a multiplicidade de $t = 0$ como raiz de $f(t)$. (Se $f(t)$ é identicamente nulo, então esta multiplicidade é considerada $+\infty$.) Note que a multiplicidade de interseção é independente da escolha das equações $F_1, \ldots, F_m$. De fato, temos

$$f(t) = \mathrm{mdc}\{F(at) \mid F \in I(X)\}.$$

Dizemos que a reta L é *tangente a* X *em* x se a multiplicidade de interseção de L com X em x for ≥ 2. O *espaço tangente a* X *em* x é o lugar geométrico de todos os pontos de $\mathbb{A}^N$ que estão em alguma reta tangente a X em x e é denotado por T_xX.

Pela definição de espaço tangente dada acima, não é claro qual a estrutura de T_xX como subconjunto de $\mathbb{A}^N$. Vamos mostrar agora que T_xX é na verdade um fechado em $\mathbb{A}^N$. Para isso, tomamos as decomposições de cada F_i em componentes homogêneas

$$F_i = F_i^{(0)} + F_i^{(1)} + \ldots + F_i^{(r_i)},$$

onde $F_i^{(j)}$ é homogêneo de grau j. Como $x = (0, \ldots, 0)$ é raiz de F_i então $F_i^{(0)} = 0$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} F_i(ta) &= F_i^{(1)}(ta) + F_i^{(2)}(ta) + \ldots + F_i^{(r_i)}(ta) \\ &= tF_i^{(1)}(a) + t^2(F_i^{(2)}(a) + tF_i^{(3)}(a) + \ldots + t^{r_i-2}F_i^{(r_i)}(a)). \end{aligned}$$

Deste modo, $t = 0$ tem multiplicidade ≥ 2 como raiz de $F_i(ta)$ se e somente se $F_i^{(1)}(a) = 0$. Assim a reta L é tangente a X em x se e somente se

$$F_1^{(1)}(a) = \ldots = F_m^{(1)}(a) = 0.$$

Ora, a reta L pode ser determinada por qualquer um de seus pontos fora da origem, e portanto o espaço tangente a X em x é definido pelas equações

$$F_1^{(1)} = \ldots = F_m^{(1)} = 0.$$

Como cada $F_i^{(1)}$ é um polinômio homogêneo de grau 1, então T_xX é um subespaço linear de $\mathbb{A}^N$.

Exemplo. 1 - Para todo $x \in \mathbb{A}^N$ temos $T_x\mathbb{A}^N = \mathbb{A}^N$ já que $I(\mathbb{A}^N) = \langle 0 \rangle$.

2 - Seja X uma hipersuperfície de $\mathbb{A}^N$ com $I(X) = \langle F \rangle$, onde $F \in k[T_1, \ldots, T_N]$. Suponha que $x = (0, \ldots, 0) \in X$ e vamos achar T_xX. Pelo visto acima, o espaço tangente é definido por $F^{(1)} = 0$, onde $F^{(1)}$ é a componente homogênea de grau 1 de F. Note que

$$F^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial T_i}(0)T_i.$$

Se $F^{(1)}$ não é identicamente nulo, então T_xX é definido por uma equação linear em $\mathbb{A}^N$ e logo é um hiperplano de $\mathbb{A}^N$. Assim, pelo Teorema 4.6, $\dim(T_xX) = N - 1 = \dim(X)$. Por outro lado, se $F^{(1)}$ for identicamente nulo, então $T_xX = \mathbb{A}^N$ e $\dim(T_xX) = N > \dim(X)$.

3 - Tome $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \,|\, x_1^2 = x_2\}$. Então X é dado pela equação $F = T_1^2 - T_2$ e logo $T_{(0,0)}X$ é dado pela equação $T_2 = 0$, ou seja,

$$T_{(0,0)}X = \{(t, 0) \,|\, t \in k\}.$$

4 - Seja $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \,|\, x_1^3 = x_2^2\}$. Então X é dado pela equação $F = T_1^3 - T_2^2$ e temos $F^{(1)} = 0$. Logo $T_{(0,0)}X = \mathbb{A}^2$.

5 - Considere $X = Z(T_2(T_2 - T_1^2)) \subset \mathbb{A}^2$. Então $X = X_1 \cup X_2$ onde

$$X_1 = Z(T_2) \quad \text{e} \quad X_2 = Z(T_2 - T_1^2)$$

são as componentes irredutíveis de X. Já vimos que $T_{(0,0)}X_2 = L$, onde $L = \{(t, 0) \,|\, t \in k\}$. É fácil ver que também temos $T_{(0,0)}X_1 = L$. Vejamos porém que $T_{(0,0)}X \neq L$. De fato, X é dado pela equação $F = T_2^2 - T_1^2T_2$ e logo $F^{(1)} = 0$. Assim $T_{(0,0)}X = \mathbb{A}^2$.

Como o espaço tangente foi definido usando as equações de X, não é claro a princípio se um morfismo $f : X \to Y$ estabelece alguma relação entre os espaços tangente a X e a Y nos pontos correspondentes. Para deduzir esta relação, vamos obter no Teorema 5.1 uma definição equivalente de espaço tangente usando o mapa de diferencial. Mas, além disso, o espaço tangente deve ser um objeto local, e isto também não está claro pela nossa definição. Este problema será resolvido apenas na próxima seção, no Teorema 5.3.

Seja $F \in k[T_1, \ldots, T_N]$ um polinômio não nulo e tome $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{A}^N$. Então F tem uma *expressão em série de Taylor em x*

$$F(T) = F^{(0)}(T) + F^{(1)}(T) + \ldots + F^{(r)}(T)$$

onde cada $F^{(j)}(T)$ é homogêneo de grau j nas variáveis $T_i - x_i$, com $i = 1, \ldots, N$. A *diferencial de F em x* é definida por

$$d_xF = F^{(1)}(T).$$

Temos então que

$$d_xF = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial T_i}(x)(T_i - x_i).$$

Segue das propriedades de $\partial/\partial T_i$ que d_x satisfaz

$$\begin{aligned} d_x(a) &= 0 \\ d_x(F+G) &= d_xF + d_xG \\ d_x(FG) &= F(x)d_xG + G(x)d_xF, \end{aligned}$$

para $a \in k$ e $F, G \in k[T_1, \ldots, T_N]$. A última igualdade diz que d_x é de fato uma diferencial. Além disso, segue que $d_x(aF) = ad_xF$ e portanto d_x é um homomorfismo de espaços vetoriais.

Exemplo. Seja $F = T_1^3 - T_2^2$ e $x = (1,1)$. Escrevendo $F = F^{(0)} + F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)}$, onde $F^{(j)}$ é a componente homogênea de grau j nas variáveis $T_1 - 1$ e $T_2 - 1$, temos

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= 0 \\ F^{(1)} &= d_xF = 3(T_1-1) - 2(T_2-1) \\ F^{(2)} &= 3(T_1-1)^2 - (T_2-1)^2 \\ F^{(3)} &= (T_1-1)^3. \end{aligned}$$

Seja $X = Z(F) \subset \mathbb{A}^2$. Note que $x \in X$. Fazendo a mudança de coordenadas em $\mathbb{A}^2$ que leva x na origem, vemos que o espaço tangente a X em x é dado por $3T_1 - 2T_2$. Mudando novamente as coordenadas de modo que $x = (1,1)$, obtemos então que T_xX é dado por $d_xF = 0$, ou seja, T_xX é a reta

$$T_xX = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \,|\, 3x_1 - 2x_2 = 1\}.$$

Agora considere $X \subset \mathbb{A}^N$ fechado dado por equações $F_1, \ldots, F_m$ e tome $x \in X$. Então as equações do espaço tangente T_xX são

$$d_xF_1 = \ldots = d_xF_m = 0.$$

Suponha agora que $I(X) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$, e tome $g \in k[X]$. Seja $G \in k[T_1, \ldots, T_N]$ um polinômio tal que $G|_X = g$. Note que d_xG depende da escolha de G. Seja então H um outro polinômio tal que $H|_X = g = G|_X$, isto é, tal que $(H-G)|_X = 0$. Então $F = H - G \in I(X)$ e logo se escreve como

$$F = A_1F_1 + \ldots + A_mF_m$$

com $A_1, \ldots, A_n \in k[T_1, \ldots, T_N]$. Assim, para $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} d_xF &= (A_1(x)d_xF_1 + F_1(x)d_xA_1) + \ldots + (A_m(x)d_xF_m + F_m(x)d_xA_m) \\ &= A_1(x)d_xF_1 + \ldots + A_m(x)d_xF_m, \end{aligned}$$

já que $x \in X$ implica que $F_1(x) = \ldots = F_m(x) = 0$. Deste modo vemos que $d_x F|_{T_x X} = 0$ e portanto $d_x H|_{T_x X} = d_x G|_{T_x X}$. Podemos então definir a *diferencial de* $g \in k[X]$ por

$$d_x g = d_x G|_{T_x X},$$

onde G é um polinômio tal que $G|_X = g$. Obtemos deste modo um *mapa de diferencial*

$$d_x : k[X] \to (T_x X)^*$$

onde $(T_x X)^*$ é o espaço das formas lineares em $T_x X$, isto é, é o dual de $T_x X$ como espaço vetorial. É claro que se $f, g \in k[X]$ e $a \in k$ temos

$$\begin{aligned} d_x(af) &= a d_x f \\ d_x(f+g) &= d_x f + d_x g \\ d_x(fg) &= f(x) d_x g + g(x) d_x f. \end{aligned}$$

Em particular, d_x é um homomorfismo de k-espaços vetoriais.

Agora considere $I_X(x) = \{f \in k[X] \mid f(x) = 0\}$. Então (veja Teorema 1.13), $I_X(x)$ é um ideal de $k[X]$. Primeiro note que para qualquer $f \in k[X]$ temos $d_x f = d_x f_0$ onde $f_0 = f - f(x) \in I_X(x)$. Agora tome

$$f \in I_X(x)^2 = \{f_1 \cdot f_2 \mid f_i \in I_X(x),\ i = 1, 2\}.$$

Então

$$d_x f = f_1(x) d_x f_2 + f_2(x) d_x f_1 = 0,$$

isto é, $I_X(x)^2$ está contido no núcleo do homomorfismo d_x.

Teorema 5.1 *Seja X um fechado afim e $x \in X$. A restrição de d_x a $I_X(x)$ define um isomorfismo de k-espaços vetoriais entre o quociente $I_X(x)/I_X(x)^2$ e o dual $(T_x X)^*$. Assim, obtemos isomorfismo*

$$T_x X \cong (I_X(x)/I_X(x)^2)^*.$$

Demonstração. Para simplificar a notação durante a prova, tome $\eta = I_X(x)$. Considere a restrição $d_x : \eta \to (T_x X)^*$. Temos que mostrar que

$$\mathrm{im}(d_x) = (T_x X)^* \quad \text{e} \quad \ker(d_x) = \eta^2.$$

Primeiro, note que qualquer forma linear φ em $T_x X$ é induzida por uma função linear f em $\mathbb{A}^N$ com $d_x f = \varphi$ e $f(x) = 0$, e logo $\mathrm{im}(d_x) = (T_x X)^*$. Agora vamos mostrar que $\ker(d_x) = \eta^2$. Já vimos que $\eta^2 \subset \ker(d_x)$. Vejamos a inclusão contrária.

Para isso podemos supor sem perda de generalidade que $x = (0, \ldots, 0)$. Tome $g \in \eta$ tal que $d_x g = 0$ e suponha que g é induzida por um polinômio $G \in k[T_1, \ldots, T_N]$. Então $d_x G = 0$ em $T_x X$. Logo $d_x G$ é combinação das equações de $T_x X$, ou seja, se $I(X) = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$, então

$$d_x G = \lambda_1 d_x F_1 + \ldots + \lambda_m d_x F_m \tag{13}$$

e, como $d_x G, d_x F_1, \ldots, d_x F_m$ têm todos grau 1, temos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in k$. Seja

$$G_1 = G - \lambda_1 F_1 - \ldots - \lambda_m F_m.$$

Então $G_1(0) = 0$. De fato, temos $G(0) = g(0) = 0$ e $F_i(0) = 0$ para todo i, já que $x = (0, \ldots, 0) \in X$. Assim G_1 não tem fator de grau 0. Além disso, por (13), G_1 não tem fator de grau 1. Portanto G_1 só tem fatores de grau ≥ 2, isto é, $G_1 \in \langle T_1, \ldots, T_N \rangle^2$. Mas $G_1|_X = G|_X = g$ e logo $g \in \langle t_1, \ldots, t_N \rangle^2$, onde $t_i = T_i|_X$. Como $x = (0, \ldots, 0)$, temos $\eta = \langle t_1, \ldots, t_N \rangle$ e logo $g \in \eta^2$.

Para a última afirmação, basta lembrar que se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita com $V \cong W^*$ então vale $V^* \cong W$. □

Definição. O espaço vetorial $I_X(x)/I_X(x)^2$ é o *espaço cotangente* de X em x.

Agora seja $f : X \to Y$ um morfismo de fechados afins. Tome $x \in X$ e seja $y = f(x)$. Considere o mapa de pullback $f^* : k[Y] \to k[X]$. É claro que

$$f^*(I_Y(y)) \subset I_X(x) \quad \text{e} \quad f^*(I_Y(y)^2) \subset I_X(x)^2.$$

Assim, f^* induz um mapa

$$I_Y(y)/I_Y(y)^2 \to I_X(x)/I_X(x)^2,$$

ou seja, um mapa $(T_y X)^* \to (T_x X)^*$. Obtemos assim o *mapa de diferencial de f*

$$d_x f : T_x X \to T_y Y.$$

Note em particular que se f é isomorfismo então f^* é isomorfismo e logo $d_x f$ é isomorfismo. Assim $X \cong Y$ implica que $T_x X \cong T_{f(x)} Y$, ou seja, a dimensão do espaço tangente é invariante por isomorfismo.

Obs. A recíproca da afirmação acima é falsa, isto é, existem morfismos $f : X \to Y$ tais que $d_x f$ é um isomorfismo para todo $x \in X$, mas f não é isomorfismo. Um morfismo f tal que $d_x f$ é isomorfismo para todo x é dito um *morfismo étale*.

5.2 Anel local

Seja $X \subset \mathbb{A}^N$ um fechado. Supomos primeiro que X é irredutível. Definimos o *anel local* de X em um ponto x por

$$\mathcal{O}_{X,x} = \left\{ \frac{f}{g} \in k(X) \middle| g(x) \neq 0 \right\},$$

isto é, é o subanel de $k(X)$ das funções regulares em x. Este anel é na verdade uma localização de $k[X]$, como veremos a seguir.

Seja A um anel comutativo e $P \subset A$ um ideal primo. Definimos a *localização de A em P* como o anel

$$A_P = \{(f,g) \mid f, g \in A,\, g \notin P\}/\sim,$$

onde $(f,g) \sim (f',g')$ se existe $h \in A - P$ tal que $h(fg' - f'g) = 0$. (A necessidade da introdução do fator h na definição vem da possibilidade de existência de divisores de zeros em A.) O anel A_P tem operações dadas por

$$\begin{aligned} (f,g)\cdot(f',g') &= (ff',gg') \\ (f,g)+(f',g') &= (fg'+f'g,gg') \end{aligned}$$

Denotamos usualmente os elementos de A_P por f/g. Temos um homomorfismo injetor

$$\begin{aligned} \varphi : A &\to A_P \\ f &\mapsto f/1. \end{aligned}$$

Note que um elemento $f/g \in A_P$ é inversível se e somente se $f \notin P$. Assim, o ideal

$$\mathfrak{m}_P = \{f/g \in A_P \mid f \in P,\, g \notin P\}$$

consistindo de todos os elementos não-inversíveis de A_P é um ideal maximal de A_P. Na verdade, $\mathfrak{m}_P$ é o único ideal maximal de A_P já que um ideal de A_P que não está contido em $\mathfrak{m}_P$ deve conter uma unidade de A_P e logo é igual a A_P. Assim A_P é um anel local. Se A é Noetheriano, então A_P também é.

Deste modo, o anel local de uma variedade afim X em um ponto $x \in X$ é a localização de $k[X]$ no ideal $I_X(x)$. Assim, se X é um fechado afim não necessariamente irredutível, definimos o *anel local de X em x* como a localização

$$\mathcal{O}_{X,x} = k[X]_{I_X(x)}.$$

Como $k[X]$ é Noetheriano, então $\mathcal{O}_{X,x}$ também é Noetheriano. Além disso, $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local com ideal maximal

$$\mathfrak{m}_x := \{f/g \mid f, g \in k[X],\, g(x) \neq 0,\, f(x) = 0\}.$$

Obs. 1 - Toda função racional $f/g \in \mathcal{O}_{X,x}$ define um uma função regular numa vizinhança de x, mais especificamente, no aberto principal X_g contendo x. A relação de equivalência em $\mathcal{O}_{X,x}$ diz que $f/g \sim f'/g'$ se estas funções são iguais no aberto $X_{gg'h}$ para algum $h \in k[X]$ com $h(x) \neq 0$. (Note que $x \in X_{gg'h}$.) Assim, temos que

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{(\varphi, U) \,|\, \varphi \in k(X),\, \varphi \text{ regular em } U \ni x\}/\sim$$

onde $(\varphi, U) \sim (\psi, V)$ se e somente se $\varphi|_{U\cap V} = \psi|_{U\cap V}$.

2 - Seja $Y \subset X$ uma subvariedade. Então $I_X(Y)$ é um ideal primo de $k[X]$, pois $I(Y)$ é primo e $I_X(Y) = I(Y)/I(X)$. Assim, podemos tomar a localização de $k[X]$ em $I_X(Y)$. Esta localização é o anel local $\mathcal{O}_{X,Y}$ de X em Y.

Agora considere um fechado afim $X \subset \mathbb{A}^n$ e tome $x \in X$. A diferencial de uma função racional $P/Q \in k(T_1, \ldots, T_n)$ regular em x pode ser deduzida notando-se que $(P/Q) \cdot Q = P$ e logo

$$d_x P = d_x\left(\frac{P}{Q} \cdot Q\right) = \frac{P}{Q}(x) d_x Q + Q(x) d_x\left(\frac{P}{Q}\right).$$

E assim,

$$d_x\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{1}{Q(x)}\left(d_x P - \frac{P(x)}{Q(x)} d_x Q\right) = \frac{Q(x)d_xP - P(x)d_xQ}{Q(x)^2}.$$

Agora, uma função $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ pode ser vista como a restrição a X de uma função da forma P/Q como acima. Logo, definindo

$$d_x f = d_x\left(\frac{P}{Q}\right)\Bigg|_{T_xX}$$

obtemos um mapa de diferencial

$$d_x : \mathcal{O}_{X,x} \to (T_xX)^*.$$

De modo análogo ao empregado na seção anterior, mostra-se que d_x está bem definido.

Proposição 5.2 *Seja X um fechado afim e $x \in X$. Então d_x define um isomorfismo de espaços vetoriais*

$$T_xX \stackrel{\sim}{=} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*.$$

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 5.1. □

A proposição anterior mostra que T_xX é de fato um invariante local, isto é, se $U \subset X$ é uma vizinhança de x em X, então

$$T_xX = T_xU$$

pois $k(X) = k(U)$. Este fato, juntamente com o fato de que o espaço tangente é invarinte por isomorfismo, pode ser usado para definir o espaço tangente a um conjunto algébrico quasi-projetivo X em um ponto $x \in X$. De fato, seja $U \subset X$ um aberto afim contendo x, então temos $f : U \xrightarrow{\sim} Y$ para algum fechado afim Y. Podemos tomar $T_x X = T_x U \cong T_{f(x)} Y$. Alternativamente, podemos definir $\mathcal{O}_{U,x}$ como a localização do anel $k[U]$ no ideal primo $I_U(x)$. Assim, $T_x U$ pode ser construído abstratamente como $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ e novamente podemos tomar $T_x X = T_x U$.

Agora note que se X é um conjunto algébrico afim, então existe mergulho $i : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ para algum n. Assim, obtemos um mergulho $d_x i : T_x X \hookrightarrow T_x \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n$. Do mesmo modo, se X é projetivo, então existe mergulho $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Suponha que $i(x) \in \mathbb{A}^n_j$. Então $U = i^{-1}(\mathbb{A}^n_j)$ é um aberto principal (e logo afim) de X contendo x (exercício). Assim $i|_U : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_j$ induz um mergulho

$$d_x i : T_x X = T_x U \hookrightarrow T_x \mathbb{A}^n_j \cong \mathbb{A}^n.$$

O fecho projetivo de $T_x X$ em $\mathbb{P}^n$ é chamado o *espaço tangente projetivo de X em x*.

5.3 Pontos regulares e singulares

Seja $X \subset \mathbb{A}^N$ uma variedade afim e tome $x \in X$. Considere

$$TX = \{(p, x) \in \mathbb{A}^N \times X \,|\, p \in T_x X\}.$$

Então TX é fechado em $\mathbb{A}^N \times X$ (exercício). Seja $\pi : TX \to X$ a segunda projeção. Então é claro que $\pi(TX) = X$ e que

$$\pi^{-1}(x) = \{(p, x) \,|\, p \in T_x X\} \cong T_x X.$$

Dizemos que o morfismo $\pi : TX \to X$ é o *fibrado tangente de X*. O Teorema 4.10 implica que existe $s \geq 0$ tal que $\dim(T_x X) \geq s$ para todo $x \in X$ e que o conjunto dos $x \in X$ tais que $\dim(T_x X) > s$ é um fechado próprio de X. Veremos a seguir que $s = \dim(X)$.

Dizemos que o ponto $x \in X$ é *regular* ou *não-singular* se $\dim(T_x X) = s$. Se $\dim(T_x X) > s$ então x é dito um ponto *singular* de X. Dizemos que X é *suave* ou *não-singular* se todo ponto de X é regular. Notamos que os pontos regulares formam um aberto não-vazio em X.

Teorema 5.3 *Seja X uma variedade afim e $x \in X$ um ponto não-singular. Então* $\dim(T_x X) = \dim(X)$.

Demonstração. Seja $n - 1 = \dim(X)$. Vimos na Seção 1.3 que X é birracional a uma hipersuperfície Y de $\mathbb{A}^m$ para algum m. Mas então, pelo Lema 4.1 e o Teorema 4.6, temos

$$n - 1 = \dim(X) = \dim(Y) = m - 1,$$

ou seja, $m = n$. Seja $\varphi : X \dashrightarrow Y$ o mapa birracional e tome $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos tais que $\varphi|_U : U \to V$ é isomorfismo. Como o conjunto dos pontos não-singulares de X é um aberto denso e a dimensão do espaço tangente a X em cada um deles é a mesma, podemos supor que $x \in U$. Agora, como a dimensão do espaço tangente é invariante por isomorfismo, temos que

$$\dim(T_xX) = \dim(T_xU) = \dim(T_yY) = \dim(T_yV)$$

onde $y = \varphi(x)$. Basta então mostrar o teorema para a hipersuperfície Y.

Seja F uma equação de Y com $I(Y) = \langle F \rangle$. Então a equação do espaço tangente a Y em y é

$$d_yF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial T_i}(y)(T_i - y_i) = 0$$

onde $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Deste modo, temos $\dim(T_yY) = n - 1$ se e somente se os $\partial F/\partial T_i$ não são todos identicamente nulos em y. Ora, os $\partial F/\partial T_i$ não são identicamente nulos em y se não o são em uma vizinhança de y. Agora note que os $\partial F/\partial T_i$ não são identicamente nulos em Y. De fato, se os $\partial F/\partial T_i$ são identicamente nulos em Y e $char(k) = 0$, então F é constante, um absurdo. Se $char(k) = p > 0$, então as variáveis T_i aparecem com potências múltiplas de p. Mas isto implica que $F = G^p$ para algum G contrariando o fato de $\langle F \rangle$ ser ideal radical. Assim, vemos que os pontos não-singulares de Y são aqueles tais que os $\partial F/\partial T_i$ não são todos identicamente nulos em y. Mas então T_yY é definido pela equação $d_yF = 0$ e logo é um hiperplano de $\mathbb{A}^n$. Assim $\dim(T_yY) = n - 1$. □

Agora tome X um fechado afim não-necessariamente irredutível. Para $x \in X$ definimos

$$\dim_x(X) = \max\{\dim(W) \,|\, W \subset X \text{ componente irredutível contendo } x\}.$$

É claro que $\dim(X) = \max\{\dim_x(X) \,|\, x \in X\}$. Pelo Teorema 5.3, temos então

$$\dim(T_xX) \geq \dim_x(X).$$

Dizemos que x é um *ponto singular* de X se $\dim(T_xX) > \dim_x(X)$, e que x é um *ponto não-singular* ou *ponto regular* de X se $\dim(T_xX) = \dim_x(X)$. Novamente, os pontos regulares estão contidos em um aberto denso de X.

Exemplo. 1 - Seja $X = Z(T_1^3 - T_2^2)$ e tome $x = (x_1, x_2) \in X$. Então com $F = T_1^3 - T_2^2$ temos

$$d_xF = 3x_1^2(T_1 - x_1) - 2x_2(T_2 - x_2).$$

Assim, d_xF é identicamente nulo se e somente se $x_1 = x_2 = 0$. Ou seja, o único ponto singular de X é $(0, 0)$.

2 - Vamos determinar os pontos singulares de

$$X = Z(T_1^2T_2^2 + T_1^2 + T_2^2 - T_1T_2T_3).$$

Tome então $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$. Para $F = T_1^2T_2^2 + T_1^2 + T_2^2 - T_1T_2T_3$ temos

$$\begin{aligned} d_xF &= (2x_1x_2^2 + 2x_1 - x_2x_3)(T_1 - x_1) + \\ &\quad (2x_1^2x_2 + 2x_2 - x_1x_3)(T_2 - x_2) + \\ &\quad (-x_1x_2)(T_3 - x_3). \end{aligned} \tag{14}$$

Os pontos singulares são aqueles para os quais d_xF é identicamente nulo. Assim, temos que x é singular se $x_1 = x_2 = 0$ e neste caso o conjunto dos pontos singulares é

$$\text{Sing}(X) = \{(0, 0, t) \mid t \in k\}.$$

6 Suavidade e normalidade

Nesta seção veremos algumas conseqüências da condição de não-singularidade, isto é, suavidade, em uma variedade afim, bem como a relação entre os conceitos de suavidade e normalidade. A maior parte dos resultados desta seção se estende ao caso quasi-projetivo, porém nestas notas trataremos apenas o caso afim. Para um tratamento mais geral, veja o livro de I. Shafarevich.

Definição. Seja X um fechado afim e $x \in X$. Dizemos que $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_{X,x}$ são *equações locais de um fechado $Y \subset X$ em uma vizinhança de x* se existe uma vizinhança afim U de x em X tal que $f_1, \ldots, f_m$ são regulares em U e

$$I_U(Y') = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$$

em $k[U]$, onde $Y' = Y \cap U$.

Vamos ver uma condição equivalente à dada acima. Considere o ideal de $\mathcal{O}_{X,x}$ dado por

$$\mathfrak{m}_{Y,x} = \left\{ \frac{u}{v} \in \mathcal{O}_{X,x} \,\middle|\, u, v \in k[X],\, u \in I_X(Y),\, v(x) \neq 0 \right\}.$$

Note que se $x \in Y$ então temos $\mathfrak{m}_{Y,x} \subset \mathfrak{m}_x$. Por outro lado, se $x \notin Y$ então existe $u \in I_X(Y)$ que não se anula em x e logo existe $u/v \in \mathfrak{m}_{Y,x}$ que não está em $\mathfrak{m}_x$. Mas $\mathfrak{m}_x$ contém todos os elementos não-inversíveis de $\mathcal{O}_{X,x}$ e portanto $\mathfrak{m}_{Y,x}$ contém um elemento inversível. Assim, se $x \notin Y$ temos $\mathfrak{m}_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x}$.

Lema 6.1 *Seja X fechado afim e tome $x \in X$. Seja $Y \subset X$ um subconjunto fechado. Então $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_{X,x}$ são equações locais de Y numa vizinhança de x se e somente se $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$.*

Demonstração. Se $I_U(Y') = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ em $k[U]$, então é claro que $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ pois, como $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x}$, então o ideal $\mathfrak{m}_{Y,x}$ pode ser descrito como

$$\mathfrak{m}_{Y,x} = \left\{ \frac{u}{v} \in \mathcal{O}_{U,x} \,\middle|\, u, v \in k[U],\, u \in I_U(Y'),\, v(x) \neq 0 \right\}.$$

Reciprocamente, suponha que $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ e tome geradores $g_1, \ldots, g_s \in k[X]$ de $I_X(Y)$, isto é

$$I_X(Y) = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle.$$

É claro que cada $g_i \in \mathfrak{m}_{Y,x}$ e portanto podemos escrever

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} f_j \tag{15}$$

com $h_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$. Tome U o aberto principal onde as funções f_i e h_{ij} são todas regulares, note que $x \in U$. Suponha que $U = X_g$ com $g \in k[X]$. Pelo Lema 2.20, $k[U]$ consiste de elementos da forma u/g^r com $u \in k[X]$ e $r \geq 0$. Por (15), temos que

$$\langle g_1, \ldots, g_s \rangle = I_X(Y)k[U] \subset \langle f_1, \ldots, f_m \rangle.$$

Vamos mostrar que $I_X(Y)k[U] = I_U(Y')$, onde $Y' = Y \cap U$. É claro que $I_X(Y)k[U] \subset I_U(Y')$. Agora tome $v \in I_U(Y')$, então $v = u/g^r$ com $u \in k[X]$ e $r \geq 0$. Assim, $u = vg^r \in I_X(Y)$ e, como $1/g^r \in k[U]$, temos $v = u/g^r \in I_X(Y)k[U]$. Deste modo obtemos a igualdade

$$I_X(Y)k[U] = I_U(Y').$$

Então $I_U(Y') \subset \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Por outro lado, cada f_i está em $I_U(Y')$, já que cada f_i é regular em U e se anula em Y'. Deste modo, temos que $I_U(Y') = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. $\square$

Definição. Seja X um fechado afim com $\dim(X) = n$ e tome $x \in X$ um ponto regular. Dizemos que $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ são *parâmetros locais de X em x* se cada u_i está no ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ e as imagens de $u_1, \ldots, u_n$ no quociente formam uma base para o espaço vetorial $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Não é difícil mostrar que, se $u_1, \ldots, u_n$ são parâmetros locais de X em x, então $\mathfrak{m}_x = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$.

É sempre possível encontrar parâmetros locais em torno de um ponto regular. Por exemplo, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ então $u_i = T_i - x_i$ com $i = 1, \ldots, n$ são parâmetros locais de x em $\mathbb{A}^n$.

Teorema 6.2 *Seja X um fechado afim e $x \in X$ um ponto regular. O anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio de fatoração única (UFD).*

Este resultado segue de dois fatos que não serão demonstrados:

Fato 1. Seja X um fechado afim com dimensão n e $x \in X$ um ponto regular. Então toda função $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tem uma única *expansão em série de Taylor*, isto é, existe uma série formal

$$\Phi = F_0 + F_1 + \dots$$

com $F_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ homogêneo de grau i e tal que, para cada $k \geq 0$, temos

$$f = \sum_{i=0}^{k} F_i(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1},$$

onde $u_1, \dots, u_n$ são parâmetros locais de X em x. Além disso, a série Φ determina unicamente a função f. Deste modo, podemos ver $\mathcal{O}_{X,x}$ como subanel do anel $k[[T_1, \dots, T]]$ das séries formais de potências.

Fato 2. O anel $k[[T_1, \dots, T]]$ das séries formais de potências é um domínio de fatoração única. (Isto é uma conseqüência do Teorema de Preparação de Weierstrass.)

Vimos no Teorema 4.6 que toda subvariedades de codimensão 1 de $\mathbb{A}^n$ é uma hipersuperfície. O teorema a seguir nos diz que, ao menos localmente, o mesmo vale para subvariedades de um fechado afim não-singular.

Teorema 6.3 *Seja X um fechado afim e $x \in X$ um ponto regular. Tome $Y \subset X$ uma variedade tal que* $\dim(Y) = \dim(X) - 1$. *Então Y tem uma equação local numa vizinhança de x.*

Demonstração. Primeiro note que, se $x \notin Y$ então 1 é uma equação local, já que neste caso temos $\mathfrak{m}_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x} = \langle 1 \rangle$.

Agora suponha que $x \in Y$. Seja $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ uma função que se anula em Y. Como $\mathcal{O}_{X,x}$ é UFD pelo Teorema 6.2, podemos fatorar f em fatores primos. Pela irreducibilidade de Y, algum fator g também deve se anular em Y. Vejamos que g é equação local de Y em x.

Substituindo X por uma vizinhança afim de x, podemos supor que g é regular em X. É claro que $Y \subset Z(g) \subset X$. Como Y e $Z(g)$ têm ambos a mesma dimensão, temos que Y é uma componente irredutível de $Z(g)$ e logo $Z(g) = Y \cup Y'$. Vamos mostrar que $x \notin Y'$. Para isso, vamos supor que existem $h, h' \in k[X]$ satisfazendo

$$h \in I_X(Y) \quad \text{com} \quad h \notin \mathfrak{m}_{Y',x},$$

$$h' \in I_X(Y') \quad \text{com} \quad h' \notin \mathfrak{m}_{Y,x}.$$

Note que estas escolhas são possíveis se e somente se $x \in Y'$.

Agora, temos $hh' = 0$ em $Z(g)$ e logo g divide $(hh')^r$ em $k[X]$, para algum $r \geq 0$. Deste modo, g divide $(hh')^r$ em $\mathcal{O}_{X,x}$. Como $\mathcal{O}_{X,x}$ é UFD, isto significa que g divide h ou h' em $\mathcal{O}_{X,x}$. Assim h ou h' se anulam em uma vizinhança de x em $Z(g)$. Diminuindo X se necessário, podemos supor que h ou h' se anula em $Z(g)$, implicando que $h \in \mathfrak{m}_{Y',x}$ ou $h' \in \mathfrak{m}_{Y,x}$. Mas isto contraria a escolha de h e h', ou seja, não é possível escolher h e h' como acima. Deste modo, $x \notin Y'$.

Como $x \notin Y'$, novamente substituindo X por uma vizinhança de x, podemos supor que $Z(g) = Y$. Mas então $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle g \rangle$. De fato, se $u \in k[X]$ se anula em Y, então g divide u^s em $k[X]$ para algum $s \geq 0$, e logo g divide u^s em $\mathcal{O}_{X,x}$. Como $\mathcal{O}_{X,x}$ é UFD, g divide u em $\mathcal{O}_{X,x}$, mostrando que $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle g \rangle$. □

Teorema 6.4 *Seja X um fechado afim não-singular e seja $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ um mapa racional. Então o conjunto dos pontos de X para os quais ϕ não está definido tem codimensão maior ou igual a 2.*

Demonstração. Por definição, o conjunto dos pontos onde um mapa racional não está definido é fechado. Como a afirmação é local, basta mostrar o teorema numa vizinhança de um ponto $x \in X$.

Escreva $\phi = (f_0 : \ldots : f_N)$ com $f_i \in k(X)$. Podemos supor, multiplicando os f_i por um fator comum se necessário, que todo f_i está em $\mathcal{O}_{X,x}$ e $f_0, \ldots, f_N$ não têm fator comum em $\mathcal{O}_{X,x}$. Logo ϕ não está definida em pontos de uma vizinhança de x onde $f_0 = \ldots = f_N = 0$. Mas nenhuma variedade Y de dimensão $\dim(X) - 1$ pode estar contida no conjunto definido por estas equações. De fato, caso contrário, como pelo Teorema 6.3 temos $\mathfrak{m}_{Y,x} = \langle g \rangle$ para algum $g \in \mathcal{O}_{X,x}$, teríamos que $f_0, \ldots, f_m \in \langle g \rangle$, contrariando o fato de os f_i não terem fator comum. □

Obs. Os Teoremas 6.2, 6.3 e 6.4 continuam válidos para conjuntos algébricos quasi-projetivos. De fato, basta notar que os três resultados são locais e portanto basta considerar vizinhanças afins de cada ponto.

Corolário 6.5 *Todo mapa racional de uma curva não-singular para um $\mathbb{P}^n$ é um morfismo.*

Corolário 6.6 *Duas curvas projetivas não-singulares são birracionais se e somente se são isomorfas.*

Vamos agora investigar a relação entre os conceitos de normalidade e de não-singularidade. Começamos notando que a condição de normalidade pode ser traduzida em termos de anéis locais.

Lema 6.7 *Seja X uma variedade afim.*

(a) Se X é normal então, para toda subvariedade $Y \subset X$, o anel local $\mathcal{O}_{X,Y}$ é integralmente fechado;

(b) Se $\mathcal{O}_{X,x}$ é integralmente fechado para todo $x \in X$ então X é normal.

Demonstração. (a) Primeiro note que o corpo de frações de $\mathcal{O}_{X,Y}$ é $k(X)$. Agora tome $\alpha \in k(X)$ inteiro sobre $\mathcal{O}_{X,Y}$. Temos então

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{16}$$

com $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_{X,Y}$. Podemos escrever cada a_i como $a_i = b_i/c_i$ onde $b_i, c_i \in k[X]$ com $c_i \notin I_X(Y)$. Multiplicando (16) por c^n onde $c = c_1 \cdots c_n$, obtemos

$$(c\alpha)^n + d_1(c\alpha)^{n-1} + \ldots + d_{n-1}(c\alpha) + d_n = 0,$$

com $d_i \in k[X]$. Assim, sendo $\beta = c\alpha$, temos que β é inteiro sobre $k[X]$. Como X é normal, então $k[X]$ é integralmente fechado e logo $\beta \in k[X]$. Assim $\alpha = \beta/c \in \mathcal{O}_{X,Y}$ pois $\beta \in k[X]$ e $c \notin I_X(Y)$, já que $c_1, \ldots, c_n \notin I_X(Y)$ e $I_X(Y)$ é um ideal primo. Então $\mathcal{O}_{X,Y}$ é integralmente fechado.

(b) Tome $\alpha \in k(X)$ inteiro sobre $k[X]$. Então

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

com $a_1, \ldots, a_n \in k[X]$. Mas $a_i \in k[X] \subset \mathcal{O}_{X,x}$ para todo x e logo, como $\mathcal{O}_{X,x}$ é integralmente fechado, temos que ter $\alpha \in \mathcal{O}_{X,x}$ para todo x. Assim α é regular em todo ponto x de X, mostrando que $\alpha \in k[X]$. Deste modo $k[X]$ é integralmente fechado e X é normal. □

Lema 6.8 *Seja A um anel comutativo. Se A é UFD então A é integralmente fechado.*

Demonstração. Seja K o corpo de frações de A. Tome $\alpha = a/b \in K$ inteiro sobre A. Como A é UFD então podemos supor que a e b não têm fator comum. Como α é inteiro sobre A, temos

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

com $a_1, \ldots, a_n \in A$. Multiplicando por b^n temos

$$a^n + a_1a^{n-1}b + \ldots + a_nb^n = 0,$$

isto é,

$$a^n + b(a_1 a^{n-1} + \ldots + a_n b^{n-1}) = 0,$$

implicando que b divide a^n e, como A é UFD, que b divide a. Como por hipótese a e b não têm fator comum, então b deve ser uma unidade de A e logo $\alpha \in A$. □

Teorema 6.9 *Toda variedade afim não-singular é normal.*

Demonstração. Seja X uma variedade afim não-singular. Pelo Teorema 6.2, $\mathcal{O}_{X,x}$ é UFD para todo $x \in X$. Mas então pelo Lema 6.8, $\mathcal{O}_{X,x}$ é integralmente fechado e logo, pelo Lema 6.7, X é normal. □

Teorema 6.10 *Seja X um fechado afim normal e $Y \subset X$ fechado de codimensão 1. Então existe $X' \subset X$ aberto afim tal que $Y' = Y \cap X$ é não-vazio e o ideal de Y' em $k[U]$ é principal.*

Demonstração. Veja Shafarevich Teorema 2, capítulo II.5. □

Teorema 6.11 *O conjunto dos pontos singulares de uma variedade afim normal tem codimensão maior ou igual a 2.*

Demonstração. Seja X uma variedade normal de dimensão n. Seja $S \subset X$ o conjunto dos pontos singulares de X. Lembre que S é fechado. Suponha que S tem alguma componente irredutível Y de dimensão $n-1$. Tome $X' \subset X$ como no Teorema 6.10 e tome $Y' = Y \cap X$. Claro que $\dim(Y') = \dim(Y)$.

Tome $y \in Y'$ um ponto não-singular de Y' e sejam $u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathcal{O}_{Y',y}$ parâmetros locais de Y' em y. Pelo Teorema 6.10, $I_{X'}(Y') = \langle u \rangle$ é principal e temos $k[Y'] = k[X']/\langle u \rangle$. Do mesmo modo, $\mathcal{O}_{Y',y} = \mathcal{O}_{X',y}/\langle u \rangle$ e $\mathfrak{m}_{X',y}$ é a imagem inversa de $\mathfrak{m}_{Y',y}$ pelo mapa quociente

$$\psi : \mathcal{O}_{X',y} \to \mathcal{O}_{Y',y}.$$

Tome $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathcal{O}_{X',y}$ imagens inversas de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ por ψ. Então $\mathfrak{m}_{X',y} = \langle v_1, \ldots, v_{n-1}, u \rangle$ e logo

$$\dim(\mathfrak{m}_{X',y}/\mathfrak{m}^2_{X',y}) \leq n = \dim(X'),$$

mostrando que y é um ponto não-singular de X'. Mas $X' \subset X$ é um aberto denso logo y é um ponto não-singular de X, contrariando a escolha de $y \subset Y' \subset S$. Assim $\dim(S) \leq n-2$. □

7 Exercícios

7.1 Lista 1

1 - Seja A um anel e considere as afirmações abaixo:

(i) cada ideal de A é gerado por um número finito de elementos;

(ii) cada cadeia ascendente de ideais $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ de A é estacionária;

(iii) cada conjuntos não-vazio de ideais de A possui um elemento maximal.

Mostre que: (i) $\Rightarrow$ (ii); (ii) $\Rightarrow$ (iii); e (iii) $\Rightarrow$ (i). (Dica: para um ideal I de A considere o conjunto de todos os ideais finitamente gerados contidos em I.)

2 - Mostre que um k-espaço vetorial em k^n é um fechado afim.

3 - (a) Ache o ideal radical de $\langle T_1T_2^3,\, T_1^2,\, 2T_1T_2 + T_2^2 \rangle$ em $k[T_1, T_2]$;

(b) Determine o ideal gerado por T_1T_2, $T_2^2 - 1$ e $T_1 - T_2^2$ em $k[T_1, T_2]$.

4 - Para cada item abaixo determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, exibindo uma prova ou contra-exemplo:

(a) O anel $k[T_1, T_2, T_3, \ldots]$ é Noetheriano;

(b) O conjunto $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \,|\, x_1 + \ldots + x_n < 1\}$ é um aberto afim;

(c) O fecho de um aberto afim em $\mathbb{A}^2$ é o próprio $\mathbb{A}^2$;

(d) Se J é ideal de $k[T_1, \ldots, T_n]$ então $Z(J) = Z(\sqrt{J})$;

(e) Para X um fechado afim, temos que $k[X]$ é um corpo se e somente se X consiste de um único ponto.

5 - Seja $X = Z(T_1 - T_2^2)$ um fechado em $\mathbb{A}^2$.

(a) Determine os subconjuntos fechados de X;

(b) Mostre que X é irredutível verificando que X não é união de fechados próprios.

6 - Considere $X = Z(T_1T_3 + T_2, T_2(T_2 + 1))$ em $\mathbb{A}^3$. Encontre a decomposição de X em componentes irredutiveis.

7 - Seja X um fechado afim e $f : X \to \mathbb{A}^n$ uma função contínua com respeito à topologia de Zariski. Mostre que se X é irredutível então a imagem $f(X)$ também é irredutível. A recíproca é verdadeira?

7.2 Lista 2

1 - Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos de fechados afins. Mostre que a composição $g \circ f$ é um morfismo.

2 - Um automorfismo de $\mathbb{A}^1$ é um isomorfismo de $\mathbb{A}^1$ em $\mathbb{A}^1$. Mostre que os automorfismos de $\mathbb{A}^1$ são da forma $f(x) = ax + b$ com $a, b \in k$.

3 - Seja X um fechado afim. Mostre que X é *quasi-compacto*, ou seja, se $X = \cup_i U_i$ é uma cobertura de X por abertos, então existem $i_1, \ldots, i_r$ tais que $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r}$.

4 - Assuma que $char(k) \neq 2$. Seja $X = Z(T_1^2 + T_1^3 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^2$. Considere o morfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to X \\ t &\mapsto (t^2 - 1,\, t(t^2 - 1)). \end{aligned}$$

(a) Mostre que o mapa de pullback f^* é injetor e tem por imagem o subanel de $k[T]$ dos polinômios $g(T)$ tais que $g(1) = g(-1)$;

(b) Conclua que X não é isomorfo a $\mathbb{A}^1$;

(c) Ache os pontos de X onde a função racional $\phi = T_2/T_1$ é regular. X é birracional a $\mathbb{A}^1$?

5 - Seja $X = Z(T_2^2 - T_1T_3,\, T_3^2 - T_2^3) \subset \mathbb{A}^3$. Ache a decomposição de X em componentes irredutíveis e mostre que todas as componentes de X são birracionais a $\mathbb{A}^1$.

6 - Seja $J \subset k[T_0, \ldots, T_n]$ um ideal homogêneo.

(a) Mostre que J é um ideal primo se e somente se

$$f \cdot g \in J \Rightarrow f \in J \text{ ou } g \in J.$$

(b) Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um subconjunto. Mostre que X é irredutível se e somente se $I_p(X)$ é um ideal primo. (Sugestão: use o resultado equivalente para conjuntos afins e a prova do teorema projetivo dos zeros.)

7 - Seja Y um conjunto afim consistindo de apenas um ponto. Mostre que o fecho projetivo de X também consiste de um ponto.

8 - Sabemos que a interseção do cone elítico $X = Z(T_1^2 + T_2^2 - T_3^2) \subset \mathbb{A}^3$ com diferentes planos dá origem às curvas cônicas elipse, hipérbole e parábola.

(a) Descreva os pontos no infinito do fecho projetivo da curva cônica $X \cap Z(T_3 - 1)$;

(b) Descreva os pontos no infinito do fecho projetivo da curva cônica $X \cap Z(T_1 - 1)$;

(c) Descreva os pontos no infinito do fecho projetivo da curva cônica $X \cap Z(T_1 + T_3 - 1)$.

9 - Seja X um fechado afim. Mostre que X é irredutível se e somente se seu fecho projetivo é irredutível.

7.3 Lista 3

1 - Considere o mapa

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) \end{array}$$

(a) Mostre que f é um mapa birracional;

(b) Determine os pontos onde f e f^{-1} são regulares;

(c) Determine os abertos U e V de $\mathbb{P}^2$ tais que $f|_U : U \to V$ é isomorfismo.

2 - Seja X um conjunto algébrico quasiprojetivo. Mostre que a interseção de abertos afins de X é um aberto afim de X. (Sugestão: mergulho de Segre.)

3 - Mostre que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$ não é conjunto algébrico afim nem projetivo.

4 - Seguindo a prova da normalização de Noether, explicite um morfismo finito da curva normal racional de grau 2 para $\mathbb{P}^1$. (Lembre que a curva normal racional de grau 2 é a imagem do mergulho de Veronese $\nu_{1,2}$.)

5 - Seja $X = Z(T_2^2 - T_1^2 - T_1^3)$ fechado em $\mathbb{A}^2$. Considere o morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^1 & \to & X \\ t & \mapsto & (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \end{array}$$

(a) Mostre que f é finito.

(b) Mostre que f tem grau 1.

(c) Encontre $f^{-1}(0, 0)$.

6 - Seja $f : X \to Y$ um morfismo birracional (isto é, um morfismo que possui uma inversa racional) entre variedades afins. Suponha que Y é normal e que f é finito. Mostre que f é um isomorfismo.

7.4 Lista 4

1 - (a) Seja $E \subset \mathbb{P}^N$ um subespaço linear, isto é, um fechado definido por polinômios de grau 1. Mostre que, se E tem dimensão s, então E pode ser definido por um número de equações $\leq N - s$;

(b) Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ um fechado. Seja s a maior dimensão de um subespaço linear de $\mathbb{P}^N$ disjunto de X. Mostre que a dimensão de X é $N - s - 1$.

2 - Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}^N$ variedades quasi-projetivas tais que $X \cap Y \neq \emptyset$. Seja Z uma componente irredutível de $X \cap Y$. Mostre que

$$\dim Z \geq \dim X + \dim Y - N.$$

3 - Considere o fechado em $\mathbb{A}^3$ dado por

$$X = Z(T_1 T_2^2 - 2T_1 T_2 T_3,\, T_2^2 - 4T_2 T_3 + 4T_3^2).$$

(a) Determine se X é uma hipersuperfície de $\mathbb{A}^3$ encontrando as dimensões de suas componentes irredutíveis;

(b) Ache o espaço tangente a X em $x = (0, 0, 0)$.

4 - Seja $X = Z(T_1^2 + T_2^2 - T_3^2)$ fechado em $\mathbb{A}^2$. Encontre todos os pontos singulares de X.

5 - Seja X uma hipersuperfície de $\mathbb{A}^n$. Seja $x \in X$ um ponto que está na interseção de duas componentes irredutíveis de X. Mostre que x é um ponto singular de X.

7.5 Prova 1

1 - Em cada item abaixo, determine se a aformação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A interseção de dois conjuntos algébricos quasi-projetivos irredutíveis é irredutível;

(b) Seja $k = \mathbb{C}$ e considere $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ o anel dos inteiros. Então $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$;

(c) Duas retas distintas em $\mathbb{P}^2$ (i.e., dois hiperplanos de $\mathbb{P}^2$) se intersetam em exatamente um ponto.

2 - Considere o fechado afim $X = Z(T_3 - T_1 T_2,\, T_2^2 + T_1 T_3 + T_1^2 T_2) \subset \mathbb{A}^3$.

(a) Determine as componentes irredutíveis de X;

(b) Mostre que as componentes irredutíveis de X são isomorfas a $\mathbb{A}^1$.

3 - Seja $f : X \to Y$ morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos.

(a) Suponha que X e Y são fechados afins e que f^* é sobrejetora. Mostre que f é injetora. (Sugestão: mostre que para $x, x' \in X$ existe função regular em X assumindo valor 0 em x mas não em x'.)

(b) Suponha que X é variedade projetiva e que Y é conjunto algébrico afim. Mostre que f é constante.

(c) Mostre que se $g : X \to Y$ é outro morfismo, então o conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ é fechado em X;

4 - Seja $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ um morfismo. Suponha que existem $F_0, \ldots, F_m \in k[T_0, \ldots T_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau tais que, para todo $x \in X$, temos $f(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$. Seja $\Gamma_f \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ o gráfico de f.

(a) Mostre que $\Gamma_f \supset Z_p(S_i F_j - S_j F_i \,|\, 0 \leq i, j \leq m)$.

(b) Considere o mergulho de Veronese

$$\begin{array}{rcl} \nu = \nu_{1,2} : \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^2 \\ (x_0 : x_1) & \mapsto & (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2) \end{array}$$

Mostre que $\Gamma_\nu = Z_p(S_0 T_1 - S_1 T_0, S_1 T_1 - S_2 T_0)$.

7.6 Prova 2

1 - Em cada item abaixo, decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Uma curva afim é normal se e somente se é suave.

(b) Todo morfismo finito entre variedades normais é birracional.

2 - Seja $X = Z_p(T_0 T_3 - T_1 T_2) \subset \mathbb{P}^3$. Considere o mapa racional

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_0^2 : x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1 x_2). \end{array}$$

(a) Mostre que $\varphi(\mathbb{P}^2) \subset X$ e que φ tem uma inversa racional $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$;

(b) Determine abertos $U \subset \mathbb{P}^2$ e $V \subset X$ tais que $\varphi|_U : U \to V$ é isomorfismo.

3 - Seja $X = Z(T_1^3 - T_2^2) \subset \mathbb{A}^2$. Considere o morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^1 & \to & X \\ t & \mapsto & (t^2, t^3). \end{array}$$

(a) Mostre que X não é normal.

(b) Mostre que f é um morfismo finito.

(c) Calcule o grau de f e determine se f tem pontos de ramificação.

(d) Mostre que f é uma normalização.

4 - Considere $X = Z(T_1 T_2, T_2 T_3, T_1 T_3) \subset \mathbb{A}^3$.

(a) Calcule a dimensão de X;

(b) Mostre que $x = (0, 0, 0)$ é o único ponto singular de X e ache $\dim(T_x X)$.

Índice Remissivo