Subespaços invariantes, autovalores e autovetores

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = \left(x, \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z, -\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z\right)$. Mostre que $W = \{(x,y,z)\ ;\ x = 0\}$ é um subespaço invariante de T.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z).$$

   Mostre que $W = \{(x,y,z)\ ;\ x - y + z = 0\}$ é um subespaço invariante por T.

3. Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear, tal que $T_A]_\beta^\beta = A$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

   Mostre que os escalares indicados são autovalores de T_A, justificando sua resposta, e determine uma base para o subespaço do $\mathbb{R}^n$ associado a cada autovalor.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 4$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 1, \lambda = 4$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \{1,2,3\}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 4$

4. Seja $A \in M_{n\times n}(K)$, onde K é um corpo. Determine os autovalores de A, para $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (a) Determine, sem fazer cálculos, um autovalor de A e justifique sua resposta, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   (b) Determine, sem fazer cálculos, um autovalor e dois autovetores l.i e justifique sua resposta, onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Seja $A \in M_{n\times n}(K)$, onde K é um corpo. Mostre que:

   (a) Se A é matriz diagonal, então os autovalores de A são os elementos da sua diagonal principal.

   (b) $\lambda = 0$ é autovalor de A se, e somente se, A é não-inversível.

   (c) A e A^t têm os mesmos autovalores.

7. Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação K-linear, onde K é um corpo e $\dim_K V = n \geq 1$.

   Diga quais das afirmações são falsas ou verdadeiras, justificando a sua resposta.

   (a) Se $T(v) = \lambda v$, para algum $v \in V$, então λ é autovetor de T.

   (b) T é operador inversível se, e somente se, zero não é autovalor de T.

   (c) Zero é autovalor de T se, e somente se, núcleo de T é não-nulo.

   (d) $c \in K$ é autovalor de T se, e somente se, $(T - cI)(v) = 0$ tem solução não-trivial $v \in V$.

   (e) Se $T(v) = \lambda v$, para algum escalar $\lambda \in K$, então v é autovetor de T.

   (f) Se v_1 e v_2 são autovetores de T li's, então correspondem a autovalores distintos.

   (g) Se a dimensão de V é 2, então T pode ter 3 autovalores.

   (h) O número máximo de autovalores de T é a dimensão de V.

   (i) Todo operador T tem autovalores e autovetores.

8. Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação K-linear, onde K é um corpo e $\dim_K V = n \geq 1$.

   Mostre que:

   (a) Se T é inversível e λ é autovalor de T, então $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} é autovalor de T^{-1}.

   (b) Se T^2 é o operador nulo, então λ é autovalor de T se, e somente se, $\lambda = 0$.

9. Determine um autovalor (caso exista) do operador linear descrito e o subespaço associado ao autovalor, sem descrever T explicitamente.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a simetria com relação a uma reta pela origem. T é diagonalizável?

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre uma reta passando na origem. T é diagonalizável?

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a rotação de $\theta \in [0, 2\pi)$. T é diagonalizável?

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a rotação de θ em torno de uma reta pela origem. T é diagonalizável?

10. Determine, caso existam, uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tais que $D = P^{-1}AP$, para cada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

    (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$, onde $P_2(\mathbb{R}) = \{a + bt + ct^2 \,;\; a, b, c \in \mathbb{R}\}$, definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (5a + 6b + 2c) - (b + 8c)t + (a - 2c)t^2.$$

    (a) Determine o polinômio característico, os autovalores e os subespaços característicos de T.

(b) T é diagonalizável?

12. Para cada $T : V \longrightarrow V$ $\mathbb{R}$-linear, determine uma base β de V, tal que $T]_\beta^\beta$ seja matriz diagonal D. Dê a matriz diagonal D.

    (a) $V = \mathbb{R}^2$ e $T(x, y) = (3x + 4y, 2x + y)$.

    (b) $V = P_1(\mathbb{R}) = \{a + bt\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ e $T(a + bt) = a + (6a - b)t$.

    (c) $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ e $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$.

13. Sejam K um corpo, $A, P \in M_{n\times n}(K)$ com P inversível.

    Mostre que $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$, para todo inteiro $m \geq 1$.

14. Usando o exercício anterior, calcule A^{10}, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

15. O traço de uma matriz $A \in M_{n\times n}(K)$, onde K é um corpo, é $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Mostre que se $n = 2$, então o polinômio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

16. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

    Mostre que:

    (a) Se $(a - d)^2 + 4bc > 0$, então A é diagonalizável.

    (b) Se $(a - d)^2 + 4bc < 0$, então A não é diagonalizável.

17. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador K-linear.

    (a) Mostre que se $\lambda \in K$ é um autovalor de T, então λ^m é um autovalor de T^m, para todo inteiro $m \geq 1$.

    (b) Seja $f(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0$ um polinômio com coeficientes em K.
    Mostre que se $\lambda \in K$ é um autovalor de T, então $f(\lambda)$ é um autovalor de $S = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0I$, onde $I(v) = v$, para todo $v \in V$.

18. Sejam S e T operadores K-lineares e W um subespaço de V invariante por T e por S.

    Mostre que W é invariante por $S + T$ e por $S \circ T$.

19. Sejam S e T operadores K-lineares, tais que $S \circ T = T \circ S$. Sejam $\lambda \in K$ um autovalor de T e W o subespaço característico associado a λ.

    Mostre que W é um subespaço invariante por S.

20. Seja V um espaço vetorial real de dimensão ímpar $n \geq 3$. Mostre que para todo operador linear $T : V \longrightarrow V$, existe W subespaço de V, tal que $W \neq V$, $W \neq \{0\}$ e W é invariante por T.

21. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão $n \geq 1$. Mostre que para todo operador linear $T : V \longrightarrow V$, existe W subespaço de V, tal que $W \neq \{0\}$ e W é invariante por T.

Produto Interno

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Para $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$ defina $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + y_1y_2$. Mostre que f é um produto interno.

2. Sejam $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$ polinômios quaisquer de $P_n(\mathbb{R})$. Mostre que a função definida por : $\langle p(t), q(t)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ é um produto interno em $P_n(\mathbb{R})$.

3. Seja $C([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$; f contínuas $\}$. Mostre que a função definida por: $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ é um produto interno em $C([a, b])$.

4. Seja V o espaço vetorial real das matrizes 2×1 com coeficientes reais. Seja $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para $X, Y \in V$, definimos $f_A(X, Y) = Y^tAX$, onde Y^t é a transposta de Y. Mostre que

   f_A é um produto interno em V se, e somente se, $A = A^t$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $\det(A) > 0$,

   onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

5. Seja $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Mostre que $\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^tA)$ é um produto interno em V, onde $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.

   (b) Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$.

6. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^3$ para mostrar que se $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, então

$$(a + b + c) \cdot \left(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}\right) \geq 9.$$

7. Sejam a, b, c números reais positivos, tais que $a + b + c = 1$. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^3$ para mostrar que

$$\left(\tfrac{1}{a} - 1\right)\left(\tfrac{1}{b} - 1\right)\left(\tfrac{1}{c} - 1\right) \geq 8.$$

8. Mostre que $\langle u, v\rangle) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$, é um produto interno no $\mathbb{R}^2$.

9. Mostre o teorema de Pitagóras: se $u \perp v \Longrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

10. Mostre a lei do paralelogramo: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \ \forall u, v \in (V, \langle , \rangle)$.

11. Mostre a desigualdade triangular.

12. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ se, e somente se, $\{x, y\}$ é linearmente dependente.

13. Prove que se $| \langle x, y\rangle |= \|x\| + \|y\|$, então $\{x, y\}$ é linearmente dependente.

    Dê exemplo mostrando que a recíproca desta afirmação é falsa.

14. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, prove que se $(x + y) \perp (x - y)$, então $\|x\| = \|y\|$.

    Interprete geometricamente.

15. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$.

    (a) Mostre que se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$, então $u = 0$.

    (b) Mostre que se u é ortogonal a v, então todo múltiplo escalar de u também é ortogonal a v.

16. Encontre um vetor unitário ortogonal a $v_1 = (1,1,2)$ e a $v_2 = (0,1,3)$ em $\mathbb{R}^3$.

17. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortogonal de um espaço euclidiano V.

    Sejam $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$.

    Calcule $\langle u, v \rangle$, onde $\langle , \rangle$ indica o produto interno de V.

18. Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores de $\mathbb{R}^3$:
    (a) $u = (1,1,1),\ v = (1/2, -1, 1/2)$ (b) $u = (1,-1,0),\ v = (2,-1,2)$

19. Em $V = P_3(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, determine o ângulo entre os seguintes pares de vetores:
    (a) $p(t) = t^3 - t - 1,\ q(t) = t^2 + 1,$ (b) $p(t) = 2,\ q(t) = t^3 + t + 1$

20. (a) Esboce o subconjunto $S = \{u \in \mathbb{R}^3;\ \|u\| = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$, onde $\|\ \|$ é a norma definida a partir do produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Esboce o subconjunto $S = \{u \in \mathbb{R}^3;\ \|u\|_1 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$, onde $\|.\|_1$ é a norma do produto interno $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = (1/9)x_1y_1 + (1/4)x_2y_2$.

21. Seja V um K-espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, e $\dim_K V = n$. Seja W um subespaço de V.

    (a) Mostre $W^\perp = \{v \in V\ ;\ \langle v, w \rangle = 0\ ,\ \text{para todo } w \in W\}$ é um subespaço de V.

    (b) Mostre que $W \cap W^\perp = \{0\}$.

    (c) Mostre que $V = W + W^\perp$. Conclua que essa soma é soma direta.

22. Achar uma base ortogonal para os subespaços de R^3 gerados pelos vetores:
    (a) $(1,1,-1), (1,0,1)$ (b) $(2,1,1), (1,3,1)$.

23. Achar uma base ortogonal para o espaço solução de:

    (a) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ (b) $x - y + z = 0$

24. Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado por $u = (1,2,3,-1,2)$ e $v = (2,4,7,2,-1)$. Determine uma base para o complemento ortogonal $W^\perp$ de W.

25. Considere $V = C([0,1])$ com produto interno dado pela integral. Determine uma base ortonormal para cada subespaço W:

    (a) W é o subespaço gerado por $f(t) = t, g(t) = t^2$.

    (b) W é o subespaço gerado por $f(t) = 1 + t, g(t) = t^2$.

    (c) W é o subespaço gerado por $f(t) = \cos(2\pi t)$, $g(t) = \text{sen}(2\pi t)$.