Universidade Federal Fluminense
Departamento de Análise
Lista de Exercícos de Álgebra Linear II

27 de maio de 2009

Dizemos que um operador linear $P : V \to V$ é *idempotente* se $P^2 = P$ e um operador linear $S : V \to V$ é uma *involução* se $S^2 = I$.

Uma transformação linear $B : W \to V$ é chamada de *inversa à direita* da transformação linear $A : V \to W$ quando se tem $AB = I_W$. E dizemos que B é a *inversa à esquerda* de A se $AB = I_V$.

1. Seja $P : V \to V$ um operador linear. Se P é idempotente então V é soma direta do núcleo de P com a sua imagem. Além disso, P é a projeção sobre a $Im(P)$ paralelamente a $Ker(P)$.

2. Seja $S : V \to V$ um operador linear tal que $S^2 = I$. Prove que $F_1 = \{v \in V : Sv = v\}$ e $F_2 = \{v \in V : Sv = -v\}$ são subespaços vetoriais de V e $V = F_1 \oplus F_2$. E para todo $v \in V$ se $v = u_1 + u_2$, com $u_1 \in F_1$ e $u_2 \in F_2$ então $S(v) = u_1 - u_2$.

3. Uma transformação linear $A : V \to W$ possui uma inversa à direita $B : W \to V$ se e, somente se, A é sobrejetora.

4. Uma transformação linear $A : V \to W$ possui uma inversa à esquerda $B : W \to V$ se e, somente se, A é injetora.

5. Seja A auto-adjunto. Prove que $A^k(v) = 0$ implica $A(v) = 0$.

6. Para cada uma das matrizes simétricas A abaixo, determine uma matriz ortogonal P tal que P^tAP é diagonal: (a) A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, (b)$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e (c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Determine uma mudança de coordenadas ortogonal que diagonaliza cada uma das formas quadráticas dadas abaixo: (a) $Q(x, y) = 2x^2 - 6xy + 10y^2$ e (b) $q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xz - 4yz + 2z^2$.

8. Suponha que T_1 e T_2 são auto-adjuntos. Mostre que T_1T_2 é auto-adjunto se e, só se, $T_1T_2 = T_2T_1$.

9. Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ um subespaço vetorial não-nulo. Sabemos que $V = W \oplus W^\perp$, ou seja, se $v \in V$, $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$. Seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = v_1 - v_2$. Mostre que T é um operador auto-adjunto de V.

10. Determine a base dual $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ da base
$$\{v_1 = (1, -1, 3), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (0, 3, 2)\}$$
de $\mathbb{R}^3$.