Universidade Federal Fluminense - UFF/GAN

Lista 4 de Álgebra Linear II

27 de abril de 2012

Antes de começar a lista vou enunciar dois teoremas um é a respeito da decomposição primária de um operador e o outro trata da forma de Jordan de um operador, não pretendo provar estes resultados, quero apenas que vocês saibam aplicá-los. Vou propor alguns exercícios para verificar partes destes teoremas.

Teorema 1 (Decomposição Primária) *Seja $T : V \to V$ um operador linear e $M_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_r}$ o seu polinômio mínimo, e os p_i são polinômios distintos, irredutíveis e mônicos, e seja $W_i = \mathcal{N}(p_i(T)^{m_i})$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Então vale:*

(a) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$;

(b) Cada W_i é um subespaço T-invariante;

(c) Se o T_i é o operador induzido sobre W_i por T, então o polinômio mínimo de T_i é $p_i(x)^{m_i}$.

Teorema 2 (Forma Canônica de Jordan) *Seja $T : V \to V$ um operador linear em que os polinômios característicos e mínimos são:*

$$\Delta_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r} \text{ e } M_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

e em que os λ_i são escalares distintos. Então T tem uma representação matricial diagonal em blocos de Jordan $J(\lambda_i, s_i)$. Para cada bloco λ_i, os blocos $J(\lambda_i, s_i)$ têm as seguintes propriedades:

(i) Existe pelo menos um bloco $J(\lambda_i, m_i)$ e o outros $J(\lambda_i, s_i)$ tem $s_i \leq m_i$;

(ii) A soma das ordens dos blocos $J(\lambda_i, s_i)$ é n_i;

(iii) A quantidade de blocos $J(\lambda_i, s_i)$ é a multiplicidade geométrica de λ_i;

(iv) O número de $J(\lambda_i, s_i)$ de cada ordem possível é determinado, de modo único, pelo operador T.

1. Encontre as possíveis formas de Jordan do operador $T : V \to V$ se o seu polinômio característico e mínimo são:
   a) $\Delta_T(x) = (x - 2)^4 (x - 5)^3$ e $M_T(x) = (x - 2)^2 (x - 5)^3$
   b) $\Delta_T(x) = (x - 2)^5$ e $M_T(x) = (x - 2)^2$

2. Encontre as possíveis formas de Jordan do operador $T : V \to V$ se o seu polinômio característico $\Delta_T(x) = (x-1)^3(x-3)^2$. Em cada caso, encontre o polinômio mínimo, $M_T(x)$.

3. Encontre o polinômio mínimo das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e α e β duas bases de V, considere $A = [T]_\alpha^\alpha$ e $B = [T]_\beta^\beta$. Mostre que

$$\Delta_A(x) = \det(A - xI) = \Delta_B(x) = \det(B - xI).$$

5. Mostre que A e sua transposta A^t tem o mesmo polinômio mínimo.

6. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e $f(t) = g(t)h(t)$ um polinômio tal que $f(T) = 0$, com os polinômios $g(t)$ e $h(t)$ primos entre si. Então V é soma direta dos subespaços T-invariantes $U = \mathcal{N}(g(T))$ e $W = \mathcal{N}(h(T))$.

7. Seja $N : V \to V$ um operador linear. Suponha que, para $v \in V$, tenhamos $N^k(v) = 0$, mas $N^{k-1}(v) \neq 0$. Prove que as seguintes afirmações

   (a) O conjunto $S = \{v, N(v), N^2(v), \ldots, N^{k-1}(v)\}$ é LI.

   (b) O subespaço W gerado por S é N-invariante.

   (c) Em relação à base $\{v, N(v), N^2(v), \ldots, N^{k-1}(v)\}$ de W, a matriz de N é uma matriz quadrada de ordem k dada pelo bloco de Jordan $J(0, k)$.

8. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e denotemos por $U = \mathcal{N}(T^i)$ e $W = \mathcal{N}(T^{i+1})$. Mostre que:

   (a) $U \subset W$, (b) $T(W) \subset U$.

9. Seja $B = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$. (a) Encontre todos os autovalores de B. (b) Encontre uma base de autovetores de B (veja que eles são ortogonais). (c) Obtenha a matriz P tal que $D = P^{-1}BP$ é diagonal.

10. Seja A uma matriz quadrada e $f(t)$ um polinômio qualquer. Prove que: (a) $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, (b) $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$, (c) $f(A^t) = f(A)^t$ e por fim (d) Se A é simétrica, então $f(A)$ é simétrica.