Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
1^a *Prova de Álgebra Linear II*

Nome(a):____

05/05/2015

1. $[2,0pts]$ Calcule, por escalonamento, o determinante da seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. $[2,0pts]$ Sejam A e B duas matrizes semelhantes. Prove que o polinômio minímo $M_A(x)$ de A é igual ao polinômio mínimo $M_B(x)$ de B.

3. $[2,0pts]$ Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear que na base canônica $\mathcal{C}$ tem matriz A. Mostre que o polinômio característico de T, é dado por:

$$\Delta_T(x) = x^3 - \operatorname{tr}(A)x^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})x - \det(A).$$

4. $[3,0pts]$ Seja $T : V \to V$ um operador linear definido pela matriz abaixo com respeito a base canônica $\mathcal{C}$

$$\text{(i) } A = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \text{ (ii) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Em cada um dos casos faça o seguinte:

(a) Calcule o polinômio característico;
(b) Encontre os autovalores;
(c) Obtenha o polinômio mínimo;
(d) Decida se o operador é diagonalizável ou não (justique);
(e) Se for diagonalizável obtenha a matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal. Caso não seja diagonalizável obtenha a forma de Jordan do operador.

5. $[2,0pts]$ Encontre todas as possíveis formas de Jordan das matrizes cujos polinômios característicos $\Delta(x)$ e mínimo $m(x)$ são:

(a) $\Delta(x) = (x-3)^5$ e $m(x) = (x-3)^2$;
(b) $\Delta(x) = (x-1)^4(x+2)^2$ e $m(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Boa Prova!