XIV SEMANA DE MONITORIA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
GAN - DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
PROF.: ORIENTADOR: JONES COLOMBO
MONITORA: DANIELLE NASCIMENTO
TRABALHO DE ÁLGEBRA LINEAR II

Uma aplicação para Álgebra Linear:

Resolução de Sistemas Inconsistentes e a Tomografia Computadorizada.

TOMOGRAFIA (Problema básico):

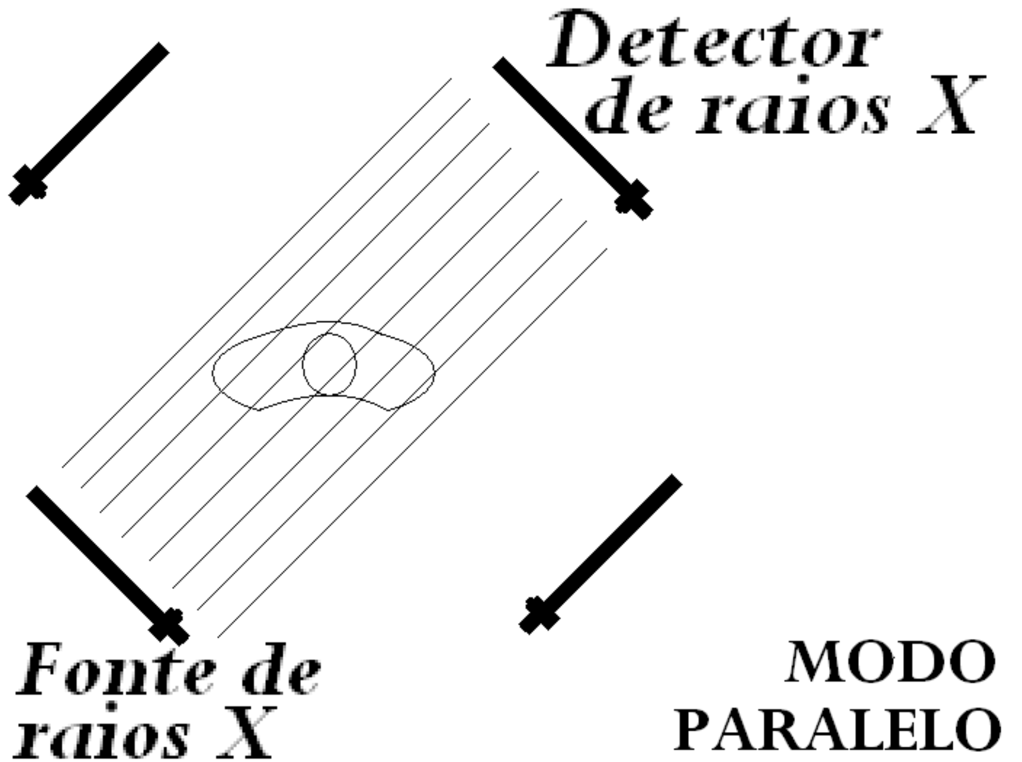
Construir uma imagem do corpo humano usando dados coletados por uma grande quantidades de feixes individuais de raios X emitidos ao longo da seção transversal. Esses dados são processados por um computador e a seção transversal computada é exibida num monitor de vídeo.

TOMOGRAFIA X ÁLGEBRA LINEAR

A construção de um corte transversal do corpo humano será feita a partir da análise do escaneamento por raios X que levarão a um sistema linear inconsistente. Veremos uma técnica iterativa que nos fornecerá uma ″solução aproximada` para tal sistema linear.

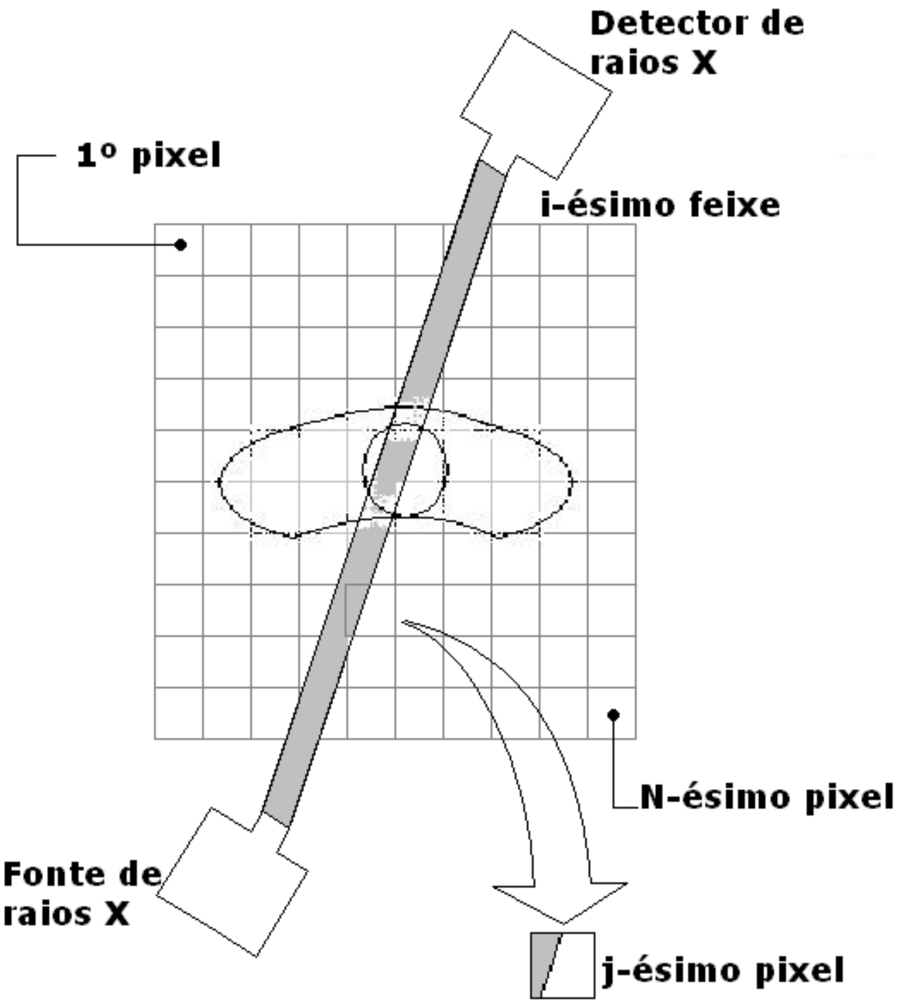
MODOS DE ESCANEAR

A fonte emite milhares de feixes de raios X que passam pela seção transversal, as intensidades desses feixes são medidas pelo detector e as medidas são transmitidas a um computador, onde são processadas.



DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES:

O campo de visão onde está a seção transversal é dividido em muitos pixels quadrados numerados de 1 a N. Queremos determinar a densidade dos raios X de cada pixel. Depois de determinadas as densidades, elas serão reproduzidas num monitor, cada pixel sendo sombreado com um nível de cinza proporcional à sua densidade de raios X.



DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES:

Os raios X são absorvidos pelo tecido dentro do pixel.

Quantitativamente, a densidade de raios X do *j-ésimo* pixel é denotada por $\mathbf{x_j}$ e é definida por

$$\mathbf{x_j} = \ln\left(\frac{\text{número de fótons entrando no } j\text{-ésimo pixel}}{\text{número de fótons saindo do } j\text{-ésimo pixel}}\right)$$

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES:

Se o feixe de raios X passa por uma fileira inteira de pixels, então o número de fótons que saem de um pixel é igual ao número de fótons entrando no próximo pixel na fileira. Então podemos escrever

$$x_1+x_2+\ldots+x_n= \ln\left(\frac{\text{número de fótons entrando no 1º pixel}}{\text{número de fótons saindo do } n\text{-ésimo pixel}}\right)$$

Assim para determinar a densidade de raios X total de uma fileira de pixels, basta somarmos as densidades dos pixels individuais.

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES:

A densidade de feixe do *i-ésimo* feixe de um escaneamento é denotado por b_i, dado por

$$b_i = \ln \left(\frac{\text{nº de fótons do } i\text{-ésimo feixe entrando no detector sem ter a seção transversal no campo de visão}}{\text{nº de fótons do } i\text{-ésimo feixe entrando no detector com a seção transversal no campo de visão}} \right)$$

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES:

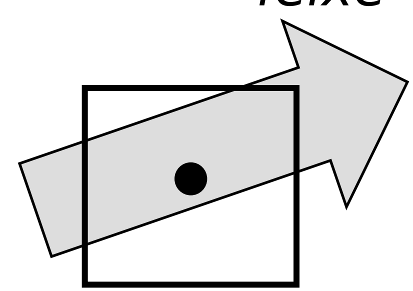
Podemos escrever a equação

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{iN}x_N=b_i$$

Essa equação é chamada a *i-ésima* equação de feixe. Há muitos métodos de definir os a_{ij} que aparecem na equação acima. Utilizaremos o Método do Centro do Pixel, que consiste em determinar os a_{ij} na *i-ésima* equação de feixe definindo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se o } \textit{i-ésimo} \text{ feixe passa pelo centro do } \textit{j-ésimo} \text{ pixel} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

i-ésimo feixe



j-ésimo pixel

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES:

Com essas informações podemos escrever o conjunto de M equações de feixe de um escaneamento completo como:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1N}x_N=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2N}x_N=b_2 \\
\vdots \\
a_{M1}x_1+a_{M2}x_2+\ldots+a_{MN}x_N=b_M
\end{array}
$$

Deste modo temos um sistema linear de M equações e N incógnitas. Considerando o caso sobredeterminado, em que M>N, no qual há mais feixes no escaneamento do que pixels no campo de visão, não podemos esperar que tal sistema tenha uma solução exata para a densidade dos

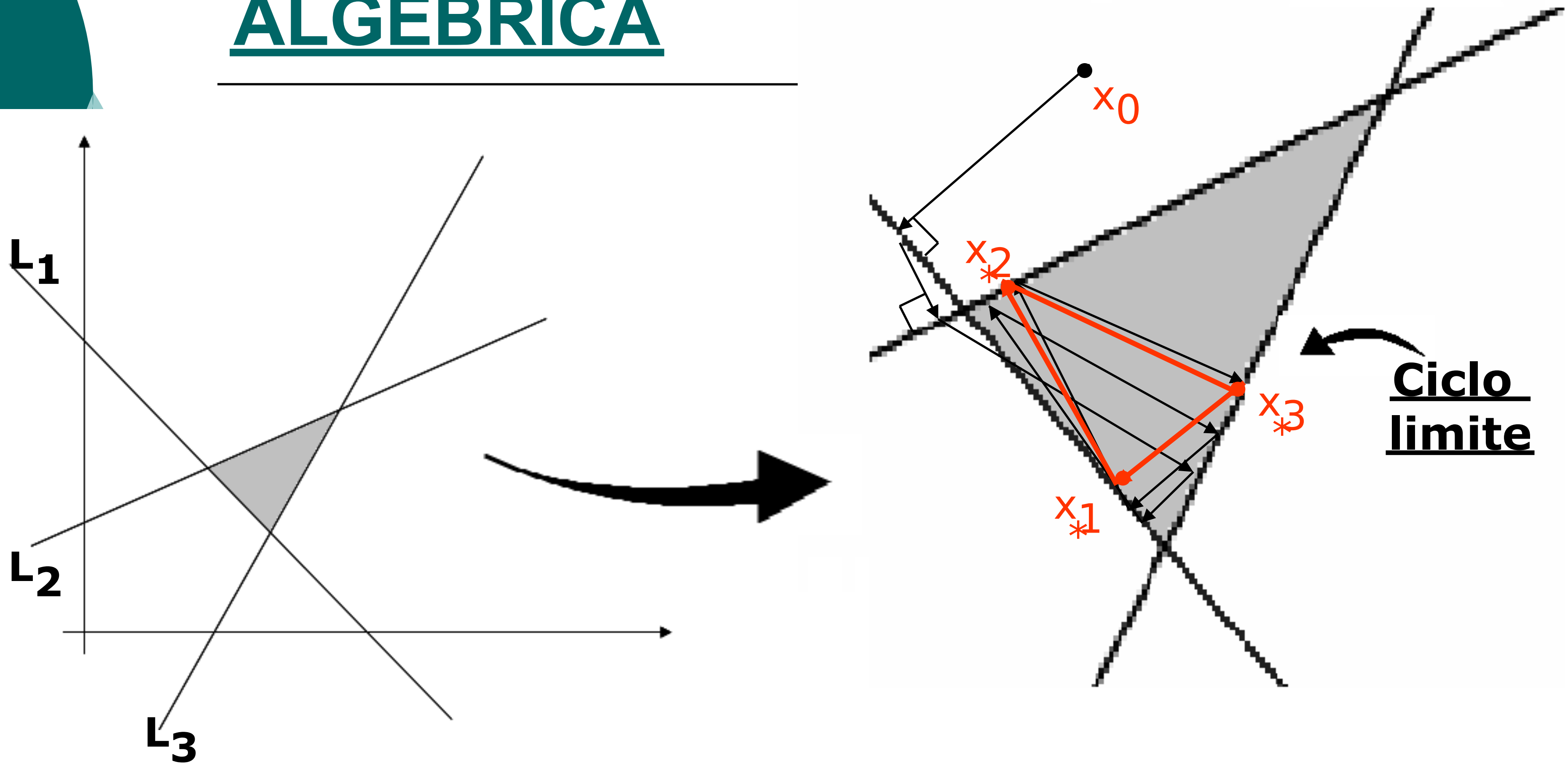
TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

Veremos o método utilizado na primeira máquina comercializada. Considere o sistema

$$L_1:\ x_1+x_2=2$$
$$L_2:\ x_1-2x_2=-2$$
$$L_3:\ 3x_1-x_2=3$$

As retas L_1, L_2 e L_3 estão estão esboçados na figura a seguir. Essas retas não têm uma interseção comum, logo o sistema acima não tem solução exata. Mas pontos da região sombreada delimitada pelas retas podem ser considerados soluções aproximadas do sistema.

TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICA



Os x_1^*, x_2^* e x_3^*, são as projeções ortogonais sobre as retas L_1, L_2 e L_3, respectivamente, começando por x_0 e terminando quando se fecha o ciclo. O triângulo em vermelho é o ciclo limite após fazermos as projeções.

TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICA

Generalizando o Algoritmo de tal modo que se aplique a sistemas sobredeterminados,

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1N}x_N=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2N}x_N=b_2 \\
\vdots \\
a_{M1}x_1+a_{M2}x_2+\ldots+a_{MN}x_N=b_M
\end{array}
$$

Cada uma dessas M equações define um hiperplano no R^n.Em geral esses hiperplanos não têm interseção comum e assim procuramos um ponto que esteja ‴razoavelmente` próximo de todos. Tal ponto será uma solução aproximada do sistema linear e suas N entradas determinarão densidades de pixel aproximadas com as quais formamos a seção transversal desejada.

CONCLUSÃO

Na Tomografia Computadorizada, basicamente, tem-se por objetivo construir uma imagem do corpo humano usando dados coletados por uma grande quantidade de feixes individuais de raios X emitidos ao longo da seção transversal. A construção de um corte transversal do corpo humano será feita a partir da análise do escaneamento por raios X, onde cada feixe fornece uma equação e teremos, então, um sistema linear inconsistente. Partiremos de uma técnica iterativa com projeções ortogonais sobre hiperplanos no R^n até chegarmos a um ciclo limite, o que nos dará uma solução aproximada para tal sistema.

Esses dados são processados por um computador e a seção transversal computada (tomografia) é exibida num monitor de vídeo.