$\mathcal{L}$ições de $\mathcal{E}$quações $\mathcal{D}$iferenciais $\mathcal{O}$rdinárias

HAROLDO R. CLARK[1] , ALDO T. LOUREDO[2] & LUIS A. MEDEIROS[3]

[1]UFF - IME - GAN hclark@vm.uff.br
[2]UEPB - DM aldotl@cct.uepb.edu.br
[3]UFRJ - IM - DMM luizadauto@gmail.com

Prefácio

Lições de Equações Diferenciais Ordinárias contém, basicamente, o conteúdo do programa da disciplina *Equações Diferenciais Ordinária - EDO* do curso de Bacharelado em Matemática ministrado pelo Departamento de Análise do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense.

Neste texto tenta-se suprir a necessidade de em um único compêndio, em português, conter todo o conteúdo da ementa da referida disciplina.

O objetivo da Lições de Equações Diferenciais Ordinárias é fazer uma exposição sobre equações diferenciais ordinárias e sistemas de equações diferenciais ordinárias tendo em mente um enfoque introdutório sobre esta teoria. Não obstante faz-se, também, incursões no nível de Cálculo Diferencial e Integral.

Admite-se que o aluno já tenha tido um primeiro curso de equações diferenciais ordinárias, como é de constume nas disciplinas de graduação nas universidades brasileira.

O texto é separado por Lições onde em média cada lição pode ser ministrada em duas aulas.

No final de cada lição são acrescentados exercícios com sugestões de resolução e as vezes alguns complementos sobre o conteúdo.

Obrigado a colega Ana Cleide Parente por sugestões, comentários e correções, as quais melhoraram e deram um toque feminino às Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.

Os Autores

Rio de Janeiro, julho de 2007.

Conteúdo

Lição 1 – Resultados Preliminares

Objetiva-se mostrar existência de soluções para uma vasta classe de equações de primeira ordem do tipo $y' = f(x, y)$.

Sejam I, J intervalos do corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e $f : I \times J \to \mathbb{R}$ uma função **contínua**. Considere a equação de primeira ordem

$$y' = f(x, y) \quad \text{para todo} \quad x \in I \quad \text{e} \quad y \in J, \tag{1.1}$$

onde y depende de x e escreve-se $y = y(x)$.

Um *Problema de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem* consiste em encontrar uma função $\phi : I \to J$ diferenciável tal que satisfaça a equação (1.1) em I. Ou seja,

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Se a função ϕ existe, em algum intervalo I e satisfaz a equação (1.1) então ϕ é chamada de *solução* de (1.1) sobre I.

O nome *Ordinária* é devido ao fato de somente ter na equação (1.1) derivada em relação a única variável x, e não derivadas parciais.

Daqui em diante ao invés de escrever *equações diferenciais ordinárias* será, na maioria das vezes, escrito simplesmente equação.

Exemplo 1.1 *Considere a equação $y' = \kappa y$, a qual descreve fenômenos, por exemplo, de crescimento populacional quando $\kappa > 0$ e de decaimento radioativo quando $\kappa < 0$.*

Por inspeção verifica-se que a função $\phi(x) = e^{\kappa x}$ satisfaz esta equação para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, ϕ é uma solução.

Exemplo 1.2 *Considere a função f independente de y tal que*

$$y' = f(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in I. \tag{1.2}$$

Se f é contínua em I sabe-se que a função integral (primitiva de f) dada por

$$\phi_0(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \textit{para} \quad x_0 \in I \quad \textit{fixado} \tag{1.3}$$

é uma solução de (1.2). Além disso, se ϕ é uma outra solução de (1.2) então existe uma constante κ tal que $\phi(x) = \phi_0(x) + \kappa$ para todo $x \in I$. Assim, todas as soluções de (1.2) são conhecidas desde que f seja contínua. Portanto, o estudo reduz-se a investigar a integral de (1.3). ([1])

[1]Usou-se no Exemplo 1.2 o Teorema Fundamental do Cálculo: Se f é contínua em $[a, b]$ então a função primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(s)ds$ é derivável em x e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Observação 1.1 *A função f será definida em $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ por uma opção didática. Os resultados apresentados a seguir podem ser formulados para espaços de dimensões maiores que 1 (um) ou mesmo para espaços vetoriais de dimensões infinitas.*

As vezes uma equação de primeira ordem é mais geral que a dada pela forma (1.1). É o caso quando y' não está em um lado da equação. Neste caso, ela é dada de modo implícito, isto é, sob a forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

A equação (1.1) é um caso especial do tipo $F(x, y, y') = y' - f(x, y)$.

Em todo texto, κ, denotará constantes. Na verdade diferentes constantes.

Casos especiais de $y' = f(x, y)$

Faz-se a seguir um breve resumo de funções f as quais determinam equações de primeira ordem. Em quase todo texto o conjunto $I \subset \mathbb{R}$ será o intervalo definido por

$$I = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq a, \quad a > 0\}.$$

Portanto, I será um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ definido em uma vizinhança fechada de x_0, a qual não necessariamente é "pequena."

I - Equação Linear

Toda equação da forma

$$y' = -p(x)y + q(x) \ \text{ em } \ I \tag{1.4}$$

é chamada *equação de primeira ordem linear.* Neste caso tem-se que o lado direito de (1.4) é dado pela função $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$.

Mostra-se a seguir que se f for contínua em I, o que induz p e q serem contínuas em I, então a equação (1.4) terá soluções em I.

Teorema 1.1 *Supondo p e q funções contínuas em I e P uma função derivável tal que $P' = p$. Então a função*

$$\psi(x) = e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} e^{P(t)} q(t)dt$$

é uma solução da equação $y' + p(x)y = q(x)$ em I. A função $\varphi(x) = e^{-P(x)}$ definida em I é uma solução da equação homogênea $y' + p(x)y = 0$. Se κ é uma constante qualquer a função $\phi = \psi + \kappa\varphi$ é solução de (1.4), e toda solução de (1.4) tem essa forma.

Demonstração - Se ϕ é uma solução de (1.4) então

$$\phi'(x) + \phi(x)p(x) = q(x). \tag{1.5}$$

Seja $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$, onde x_0 é um ponto qualquer fixado em I. Então P é derivável e $P'(x) = p(x)$ para todo $x \in I$. Multiplicando (1.5) por $e^{P(x)}$ obtém-se

$$e^{P(x)}(\phi'(x) + \phi(x)p(x)) = e^{P(x)}q(x).$$

Observe que

$$e^{P(x)}(\phi'(x) + \phi(x)p(x)) = (e^{P(x)}\phi(x))'.$$

Portanto,

$$\phi'(x) + \phi(x)p(x) = q(x) \quad \text{se, e somente se} \quad (e^{P(x)}\phi(x))' = e^{P(x)}q(x).$$

Integrando a última identidade de x_0 a x resulta, pela fórmula de Newton-Leibniz, que

$$e^{P(x)}\phi(x) = Q(x) + \kappa, \quad \text{onde} \quad Q(x) = \int_{x_0}^{x} e^{P(t)}q(t)dt \quad \text{e} \quad \kappa = \phi(x_0),$$

pois $e^{P(x_0)} = 1$. Logo, mostou-se que toda solução de (1.4) tem a forma

$$\phi(x) = e^{-P(x)}Q(x) + \kappa e^{-P(x)}. \tag{1.6}$$

Por outro lado, se κ é uma constante qualquer então a função ϕ definida em (1.6) é uma solução de (1.4).

Lembre-se que a função $\psi(x) = e^{-P(x)}Q(x)$ é uma solução particular de (1.4) (o caso $\kappa = 0$) e que $\varphi(x) = e^{-P(x)}$ é a solução da equação homogênea $y' + p(x)y = 0$
■

Observação 1.2 *Se $f(x) = p(x)y + q(x)$ na equação (1.4) então na demonstação do Teorema 1.1 troca-se $e^{P(x)}$ por $e^{-P(x)}$ e reciprocamente.*

Um *Problema de Valor Inicial* é, também, conhecido como *Problema de Cauchy*. De um modo geral, um problema de Cauchy associado a equação de primeira ordem é dado por

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.7}$$

onde y_0 significa a *condição inicial* de um determinado fenômeno no ponto inicial x_0. *A priori* o valor y_0 é conhecido. Geometricamente, a condição inicial significa que o gráfico $(x, \phi(x))$ da solução $\phi = \phi(x)$ da equação $y' = f(x, y)$ passe pelo ponto (x_0, y_0).

Observação 1.3 *A solução ϕ da equação (1.4), garantida pelo Teorema 1.1, existe para todo $x \in I$. Este fato só foi possível por que a equação (1.4) é linear. Quando a equção (1.1) não é linear o Teorema 1.1 pode falhar no que concerne a existência de soluções em* **todo** *intervalo I. Para ilustrar este fato, considere a equação $y' = y^2$. Uma solução é a função $\phi(x) = -1/x$, a qual não está definida em $x = 0$. Agora, supondo-se a condição inicial em $x_0 = 1$ igual a $\phi(1) = -1$ então esta solução existe em uma vizinhança deste ponto. Ou seja, a solução do problema de valor inicial*

$$y' = y^2 \quad \text{com} \quad y(1) = -1$$

existe para todo x no intervalo $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ para $0 < \epsilon < 1$. Em outras palavras a solução existe nas proximidades do valor inicial fixado $x_0 = 1$.

II - Equação com Variáveis Separáveis

A equação de primeira ordem $y' = f(x, y)$ é dita de *variáveis separáveis*, se f puder ser escrita na forma $f(x, y) = g(x)/h(y)$. Denotando $y' = dy/dx$ a equação $y' = g(x)/h(y)$ torna-se

$$h(y)dy = g(x)dx \tag{1.8}$$

da onde tem-se a origem do nome *variáveis separáveis.* Para esta equação tem-se o seguinte resutado de exitência de soluções.

Teorema 1.2 *Sejam $g : I \to \mathbb{R}$ e $h : J \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, e considere a equação*

$$h(y)y' = g(x) \quad \text{com} \quad h(y) \neq 0.$$

Se G e H são funções tais que $G' = g$, $H' = h$ e κ é uma constante qualquer tal que a identidade

$$H(y) = G(x) + \kappa \tag{1.9}$$

define, implicitamente, uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ então ϕ será uma solução de (1.8) em I.

Por outro lado, se ϕ é uma solução de (1.8) em I então ela satisfaz (1.9) em I para alguma constante κ. (É claro que ϕ será uma solução de (1.8) desde que $h(\phi(x)) \neq 0$ para todo $x \in I$.)

Demonstração - Se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução de (1.8) então

$$h(\phi(x))\phi'(x) = g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Integrando de x_0 a x tem-se

$$\int_{x_0}^{x} h(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Fazendo $y = \phi(t)$ tem-se $dy = \phi\,'(t)dt$ e assim obtém-se

$$\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} h(u)du = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Daí, como $y = \phi(t)$ então denotando por $H(y)$ a integral do lado esquerdo acima e $G(x)$ a integral do lado esquerdo obtem-se (1.9) a menos de uma constante arbitrária. Esta identidade define implicitamente uma função diferenciável ϕ em I. E, pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtém-se $h(\phi(x))\phi'(x) = g(x)$ para todo x em I. Portanto, ϕ é uma solução de (1.8) em I ∎

Na prática, para resolver (1.8) integra-se ambos os lados desta identidade (integral indefinida) e obtém-se

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + \kappa.$$

Assim, gera-se duas funções G e H tais que $G' = g$ e $H' = h$. Portanto, qualquer função ϕ definida implicitamente por $H(y) = G(x) + \kappa$ será uma solução de (1.8).

Exemplo 1.3 (a) *Em (1.8) considerando $h(y) = 1/\kappa$ tem-se $y' = \kappa g(x)$ cuja solução é dada pela função $\phi(x) = G(x) + \widehat{\kappa}$ com $G : I \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = \kappa g(x)$ para todo $x \in I$.*

(b) *Agora, se em (1.8) a função $g(x) = \kappa$ então $y' = \kappa/h(y)$. Ou de modo equivalente $h(y)dy = \kappa dx$. Como solução tem-se a função $H(y) = \kappa x + \widetilde{\kappa}$.*

(c) *Supondo $h(y) = 1/y^2$ e $g(x) = 1$ em (1.8) tem-se a equação não linear de primeira ordem $y' = y^2$ a qual não está definida em $y = 0$. Daí, obtém-se a equação $dy/y^2 = dx$ e integrando resulta $-1/y = x+\kappa$. Daí, $y = -1/(x+\kappa)$. Portanto, a solução é dada por*

$$\phi(x) = -\frac{1}{x+\kappa} \quad \textit{para todo} \quad x \neq -\kappa$$

Observação 1.4 *O método de separação de variáveis, apesar de ser um método para encontrar soluções, pode não determinar todas elas. Veja o exemplo* 3 (c) *acima. De fato, sendo $y' = y^2$ a solução nula $\psi(x) = 0$ não pode ser deteminada a partir da solução geral $\phi(x) = -1/(x+\kappa)$, pois se $0 = -1/(x+\kappa)$, tem-se que $0 = -1$. O que é um absurdo.*

III - Equação Exata

Seja $y' = f(x,y)$ com $f(x,y) = M(x,y)/N(x,y)$. Ou de modo equivalente,

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \Longleftrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (1.10)$$

onde M, $N : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ são funções regulares e $\mathcal{R}$ é o retângulo fechado e limitado

$$\mathcal{R} = I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\}.$$

A equação (1.10) é dita *exata* em $\mathcal{R}$ se existe uma função $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais primeiras $\partial_x F$ e $\partial_y F$ contínuas e tais que

$$\partial_x F = M \quad \text{e} \quad \partial_y F = N \quad \text{em} \quad \mathcal{R}. \tag{1.11}$$

Exemplo 1.4 *A equação $y' = -x/y$ com $y \neq 0$, a qual também é em particular, uma equação com variáveis separáveis, é exata. De fato, reescrevendo esta equação tem-se: $xdx + ydy = 0$. Por inspeção, vê-se que a relação que define implicitamente uma solução é dada por $x^2 + y^2 = 2\kappa$. Note que $F(x, y) = x^2/2 + y^2/2$ é tal que $\partial_x F(x, y) = M(x, y) = x$ e $\partial_y F(x, y) = N(x, y) = y$.*

Teorema 1.3 *Se a equação (1.10) é exata no retângulo $\mathcal{R}$ e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição (1.11) então toda função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ definida implicitamente por $F(x, y) = \kappa$ é uma solução da equação (1.10).*

Demonstração - Se a equação (1.10) é exata em $\mathcal{R}$ e F satisfaz as condições em (1.11) então (1.10) é transformada em $\partial_x F(x, y) + \partial_y F(x, y)y' = 0$. Se ϕ é uma solução de (1.10) em I então

$$\partial_x F(x, \phi(x)) + \partial_y F(x, \phi(x))\phi'(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I. \tag{1.12}$$

Daí, é natural supor, por inspeção, que $\psi(x) = F(x, \phi(x))$. Assim sendo, a identidade (1.12) assegura que $\psi'(x) = 0$ para todo $x \in I$, pois ψ' é o primeiro membro de (1.12). Deste modo teria-se $F(x, y) = \kappa$. Portanto, uma função ϕ solução de (1.10) é dada implicitamente pela relação

$$F(x, \phi(x)) = \kappa \quad \text{para todo} \quad x \in I, \tag{1.13}$$

e diferenciando (1.13) encontra-se (1.12). Logo, ϕ é uma solução da equação exata (1.10) ■

O nome *exata* associado à equação é devido ao fato de (1.12) ser o diferencial dF da função F.

A segir, será dada uma condição suficiente para que uma equação de primeira ordem seja exata. De fato, suponha que $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ é exata e que exista uma função F com derivadas parciais segunda contínuas tais que

$$\partial_x F = M \quad \text{e} \quad \partial_y F = N.$$

Daí, derivando a primeira relação com respeito a y e a segunda com respeito a x tem-se

$$\partial^2_{y\,x} F = \partial_y M \quad \text{e} \quad \partial^2_{x\,y} F = \partial_x N.$$

Como $\partial^2_{y\,x}F$ e $\partial^2_{x\,y}F$ são contínuas conclui-se, pelo teorema de Schwarz, que $\partial^2_{y\,x}F = \partial^2_{x\,y}F$ em $\mathcal{R}$. Logo, a condição desejada é

$$\partial_y M = \partial_x N. \tag{1.14}$$

Assim, tem-se a seguir a condição necessária e suficiente para que uma equação de primeira ordem seja exata.

Teorema 1.4 *Sejam M e N funções definidas no retângulo $\mathcal{R}$ com valores em $\mathbb{R}$. A equação (1.10) é exata se, e somente se, a identidade (1.14) é verificada para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$.*

Demonstração - ($\Rightarrow$) Se a equação (1.10) é exata, viu-se acima que a condição (1.14) é satisfeita.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se a condição (1.14) é satisfeita no retângulo $\mathcal{R}$, deseja-se encontrar uma função F, também definida em $\mathcal{R}$, satisfazendo

$$\partial_x F(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \partial_y F(x,y) = N(x,y) \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathcal{R}.$$

De fato, se existir F tem-se da fórmula de Newton-Leibniz que

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(x_0,y_0) &= F(x,y) - F(x_0,y) + F(x_0,y) - F(x_0,y_0) \\ &= \int_{x_0}^{x} \partial_x F(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} \partial_y F(x_0,t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt. \end{aligned}$$

Daí, define-se a função

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt. \tag{1.15}$$

De modo similar pode-se escrever

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(x_0,y_0) &= F(x,y) - F(x,y_0) + F(x,y_0) - F(x_0,y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y} \partial_y F(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} \partial_x F(s,y_0)ds \\ &= \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds. \end{aligned}$$

Daí, define-se

$$\widetilde{F}(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds. \tag{1.16}$$

Observe as funções F e $\widetilde{F}$ satizfazem, por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, as relações

$$\partial_x F(x,y) = M(x,y) \quad \text{and} \quad \partial_y \widetilde{F}(x,y) = N(x,y) \quad \text{em} \quad \mathcal{R}.$$

Daí, este teorema estará provado se for possível demonstrar que F é igual a $\widetilde{F}$ no retângulo $\mathcal{R}$. Isto é fato, pois de (1.15) e (1.16) tem-se

$$\begin{aligned} F(x,y)-\widetilde{F}(x,y) &= \int_{x_0}^{x}[M(s,y)-M(s,y_0)]ds-\int_{y_0}^{y}[N(x,t)-N(x_0,t)]dt \\ &= \int_{x_0}^{x}\Big[\int_{y_0}^{y}\partial_y M(s,t)dt\Big]ds-\int_{y_0}^{y}\Big[\int_{x_0}^{x}\partial_x N(s,t)ds\Big]dt \\ &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\Big[\partial_y M(s,t)-\partial_x N(s,t)\Big]dtds. \end{aligned}$$

Note que a última integral é nula, graças a hipótese (1.14). Logo, para todo ponto (x,y) de $\mathcal{R}$ tem-se $F(x,y)=\widetilde{F}(x,y)$ ■

Exemplo 1.5 *A equação* $(sen\,xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xydy$ *é exata, pois*

$$\begin{aligned} \partial_y M &= \partial_y(sen\,xy+xy\cos xy)=x\cos xy+x\cos xy-x^2ysen\,xy \\ &= 2x\cos xy-x^2ysen\,xy=\partial_x(x^2\cos xy)=\partial_x N. \end{aligned}$$

Na prática a resolução da equação (1.10) que permite obter a função F que satisfaz (1.11) é, em geral, obtida por uma "integração geral" de modo que $F(x,y)=C$. Ou seja

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,s)ds=C. \tag{1.17}$$

No caso particular deste exercício tem-se

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{x_0}^{x}(sen\,ty+ty\cos ty)dt+\int_{y_0}^{y}x_0^2\cos x_0sds \\ &= tsen\,ty\Big|_{x_0}^{x}+x_0sen\,x_0s\Big|_{y_0}^{y}=xsen\,xy-x_0sen\,x_0y_0. \end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$F(x,y)=xsen\,xy \quad e \quad C=x_0sen\,x_0y_0.$$

Exercícios da Lição 1

Exercício 1.1 *Determine a solução geral das equações:*

(a) $(x^2+3)y'+xy=0$; (b) $xy'+y=e^x+\ln x$.

Exercício 1.2 *Resolva os Problemas de Caychy:*

(a) $y'+2xy=x,\ \ y(0)=-3$; (b) $xy'+y=2x,\ \ y(1)=0$;

(c) $y'=2y+x(e^{3x}-e^{2x}),\ \ y(0)=2$.

Exercício 1.3 *Resolva (variáveis separáveis):*

(a) $(1+x)dy - ydx = 0$; (b) $xy^4 + (y^2+2)dy = 0$;

(c) $y' = y^2 - 4,\ \ y(0) = 2$; (d) $y' = xy^{1/2},\ \ y(0) = 0.$

Exercício 1.4 *Resolva (exata):*

(a) $2xydx + (x^2-1)dy = 0$;

(b) $(e^{2y} - y\cos xy)dx - (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)dy = 0$;

(c) $(x+y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0,\ \ y(1) = 1.$

Exercício 1.5 *Determine uma função* $M(x,y)$ *tal que a equação*

$$M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + 1/x)dy = 0$$

seja exata.

Exercício 1.6 *Considere a equação homogênea*

$$y' + p(x)y = 0 \tag{$\star$}$$

com $p \in C^0(I)$ *e* I *um intervalo qualquer de* $\mathbb{R}$*. Se* ϕ *e* ψ *são duas soluções quaisquer de* $(\star)$ *satisfazendo* $\phi(x_0) = \psi(x_0)$ *para algum* $x_0 \in I$ *então mostre que* $\phi(x) = \psi(x)$ *para todo* $x \in I$.

Sug.: Note que uma solução de $(\star)$ é do tipo $\phi(x) = \kappa \exp \displaystyle\int_{x_0}^{x} [-p(t)]dt$, onde κ é uma constante real.

Exercício 1.7 *A equação diferencial não linear*

$$y' + p(x)y = q(x)y^\kappa \tag{$*$}$$

com $p,\ q \in C^0(I)$, I *um intervalo qualquer de* $\mathbb{R}$ *e* κ *uma constante real, é chamada de* **equação de Bernoulli.** *Note que para* $\kappa = 0$ *e* $\kappa = 1$ *a equação* $(*)$ *é linear.*

(a) *Se* $y \neq 0$ *então* $(*)$ *pode ser escrita como* $y^{-\kappa}y' + p(x)y^{1-\kappa} = q(x)$*. Substituindo* $z = y^{1-\kappa}$ *nesta equação verifique que a equação de Bernoulli é transformada na equação linear* $z' + (1-\kappa)p(x)z = (1-\kappa)q(x)$;

(b) *Encontre todas as soluções de* $y' - 2xy = xy^2$;

(c) *Resolva* $y' + y/x = xy^2$.

Exercício 1.8 *A equação diferencial não linear*

$$y' - p(x)y = q(x)y^2 + r(x) \tag{$\star$}$$

com $p,\ q,\ r \in C^0(I)$ *e* I *um intervalo qualquer de* $\mathbb{R}$, *é chamada de* **equação de Ricatti.**

(a) *Se* ϕ_1 *é uma solução particular de* $(\star)$ *então mostre que as substituições* $y = \phi_1 + \psi$ *e* $y' = \phi_1' + \psi'$ *em* $(\star)$ *produzem*

$$\psi' - (p + 2\phi_1 q)\psi = q\psi^2. \tag{$*$}$$

Esta equação é do tipo Bernoulli com $\kappa = 2$.

(b) *Usando o Exercício 1.7 mostre que* $(*)$ *pode ser reduzida à equação linear* $\varphi' + (p + 2\phi_1 q)\varphi = -q$ *por meio da substituição* $\varphi = \psi^{-1}$.

(c) *Mostre que* $\phi = 2x + \psi$ *com*

$$\psi = \frac{e^{x^2}}{\kappa - \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt}$$

é uma solução de $y' + 2xy = y^2 + 2$.

(d) *Resolva* $y' + y = y^2 - 2$ *com* $\phi_1(x) = 2$ *sendo uma solução conhecida da equação.*

Exercício 1.9 *Sejam* ϕ_1 *e* ϕ_2 *duas soluções da equação* $y' + p(x)y = q(x)$ *no intervalo fechado* $I = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| \leq a,\ \ a > 0\}$. *Mostre que*

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) = [\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)] \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} p(t)dt \Big)$$

para todo $x \in I$.

Exercício 1.10 *Mostre que a equação não linear* $y' = 1 + y^2$ *possue uma solução* ϕ *tal que* $\phi(0) = 0$ *em* $I = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x| < \pi/2\}$.

Sug.: Em I a função ϕ deve satisfazer

$$\frac{\phi'(x)}{1 + [\phi(x)]^2} = (\tan^{-1} \phi)' = 1.$$

Por integração de 0 a x obtém-se $\tan^{-1} \phi(x) = x$. Verifique que $\phi(x) = \tan x$ é a solução procurada.

Lição 2 – Método das Aproximações Sucessivas

Objetiva-se mostrar existência de soluções em na vizinhança fechada de x_0

$$I = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq a, \quad a > 0\}$$

de uma equação de primeira ordem

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

submetida a condição inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

onde $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no retângulo

$$\mathcal{R} = I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x - x_0| \leq a,\ \ |y - y_0| \leq b\}.$$

Note que f pode ser uma função linear ou não, exirge-se apenas que f seja contínua.

Problema de Cauchy e sua Forma Integral

O objetivo é mostrar a existência de pelo menos uma função diferivável $\phi : I \to \mathbb{R}$ satisfazendo (2.1) e (2.2) tal que o gráfico de ϕ, isto é, os pontos $(x, \phi(x))$ pertençam ao retângulo $\mathcal{R}$ para todo x em I e $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$.

A função ϕ, nas condições acima, é chamada de solução do *Problema de Valor Inicial* - PVI ou *Problema de Cauchy* - PC

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{2.3}$$

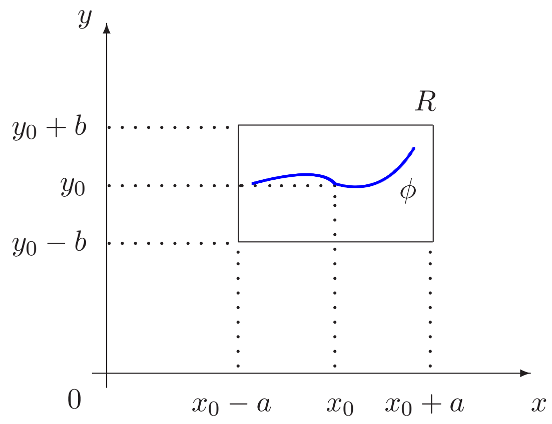
O conceito de solução do Problema de Cauchy (2.3) é dado por:

Definição 2.1 *Uma função $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do Problema de Cauchy (2.3) se, e somente se, ϕ é derivável em I;*

$$(x, \phi(x)) \in \mathcal{R} \quad \textit{para todo} \quad x \in I; \tag{i}$$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \ \ \phi(x_0) = y_0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I. \tag{ii}$$

Geometricamente, a solução ϕ pode ser traça como na figura 1, abaixo:



Mostra-se, a seguir, que o Problema de Cauchy (2.3) é equivalente a equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \quad \text{em} \quad I. \tag{2.4}$$

O conceito de solução para a equação integral (2.4) é dado por:

Definição 2.2 *Uma função $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução da equação (2.4) se, e somente se, ϕ é contínua em I;*

$$(x, \phi(x)) \in \mathcal{R} \quad \textit{para todo} \quad x \in I; \tag{i}$$

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \quad \textit{para todo} \quad x \in I. \tag{ii}$$

Teorema 2.1 *Uma função ϕ é uma solução do Problema de Cauchy - PC (2.3) no sentido da Definição 2.1 em algum intervalo I se, e somente se, ϕ é uma solução da equação (2.4) no sentido da Definição 2.2 em I.*

Demonstração - ($\Rightarrow$) Note que os itens (i) das Definições 2.1 e 2.2 são iguais. Portanto, basta mostrar que o item (ii) da Definição 2.1 implica no item (ii) da Definições 2.2 e vice-versa.

Seja ϕ uma solução do PC (2.3) em I no sentido da Definição 2.1. Ou seja,

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \phi(x_0) = y_0 \quad \text{em} \quad I. \tag{2.5}$$

Daí, tem-se que ϕ é contínua em I e como f contínua em $\mathcal{R}$ então a função $F(t) = f(t, \phi(t))$ é contínua em I. Logo integrável em I. Assim, integrando $(2.5)_1$ de x_0 a x e usando $(2.5)_2$ resulta da Fórmula de Newton-Leibniz que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \quad \text{em} \quad I. \end{aligned}$$

Logo, ϕ é uma solução de (2.4) no sentido da Definição 2.2.

$(\Leftarrow)$ Suponha ϕ solução de (2.4) em I no sentido da Definição 2.2. Então da Definição 2.2 (ii) e do Teorema Fundamental do Cálculo resulta

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{em} \quad I.$$

Assim, ϕ é derivável em I. Além disso, também, da Definição 2.2 (ii) tem-se que $\phi(x_0) = y_0$. Logo ϕ é uma solução do PC (2.3) ■

Portanto, o Teorema 2.1 assegura que, resolver o PC (2.3) consiste em encontrar soluções para a equação integral (2.4). Este será o objetivo da próxima Seção desta Lição, e em Lições posteriores serão mostradas várias versões de teoremas de existência de soluções em diferentes contextos.

O Método das Aproximações Sucessivas

O método das aproximações sucessivas é por vários autores citados com diferentes nomes. Todos visando homenagiar os primeiros matemáticos idealizadores. Assim, encontra-se na literatura citações: Método de Picard; Método de Cauchy-Picard; Método de Cauchy-Lipschitz-Picard, etc.

Trata-se de um método de obtenção de soluções aproximadas obtidas iterativamente. O método consiste em:

◇ Como uma primeira aproximação para uma solução da equação integral (2.4), considera-se a função ϕ_0 definida por

$$\phi_0(x) = y_0 \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Esta função satisfaz a condição inicial $\phi_0(x_0) = y_0$ mas, em geral, não satisfaz (2.4). Contudo, se ϕ_1 é uma função dada para todo x em I por

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_0(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt$$

tem-se que ϕ_1 é uma aproximação melhor de uma solução de (2.4), do que ϕ_0. Continuando sucessivamente esse processo, constroi-se a sucessão $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\phi_0(x) = y_0, \ldots, \phi_{k+1}(x) \quad = \quad y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_k(t))dt \quad \text{em} \quad I \tag{2.6}$$

e deseja-se que a sucessão de funções (ϕ_k), para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ convirja quando $k \to \infty$ para uma função ϕ definida em I satisfazendo

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt.$$

Portanto, nestas condições ϕ seria uma solução de (2.4). As funções $\phi_0, \phi_1, \ldots,$ definidas em (2.6) são chamadas de **Aproximações Sucessivas** para uma solução da equação integral (2.4) ou do Problema de Cauchy (2.3).

Veja um exemplo simples de como funciona a construção da sucessão das aproximações sucessivas.

Exemplo 2.1 *Seja $y = y(x)$ definida pela o Problema de Cauchy*

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \text{ com } x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Integrando de 0 a x tém-se a equação integral

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt.$$

Daí e de (2.6) tem-se que $\phi_0(x) = 1$ e $f(t, \phi_k(t)) = \phi_k(t)$. Portanto, as aproximações sucessivas são dadas por

$$\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = 1 + \int_0^x dt,\ \ldots,\ \phi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x \phi_k(t)dt.$$

Portanto,

$$\phi_1(x) = 1 + x, \quad \phi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

e por Indução Matemática deduz-se que

$$\phi_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}.$$

Observe que ϕ_k é a soma parcial da série de potências $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}$, a qual converge para a função $\phi(x) = e^x$ em $\mathbb{R}$. Ou seja, $\phi_k(x) \to \phi(x)$ quando $k \to \infty$. A função ϕ é a solução de $(*)$ ■

Note que a equação do Exemplo 2.1 é *linear*. Portanto, o Problema de Cauchy $(*)$ poderia ter sido resovildo, facilmente, pela técnica da Seção 1.2.1 da Lição 1.

Formaliza-se, agora, a existência de todas as ϕ_k em algum intervalo I contendo x_0. De fato, se $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ **contínua** então existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(x,y)| \leq M \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathcal{R}. \tag{2.7}$$

Seja

$$\alpha = \min\{a,\ b/M\}, \tag{2.8}$$

onde a e b são as constantes que definem o retângulo $\mathcal{R}$. Nestas condições mostrase, no teorema a seguir que ϕ_k, para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ existe no intervalo

$$I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq \alpha\}. \tag{2.9}$$

Teorema 2.2 *Seja* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então a sucessão das aproximações sucessivas* (ϕ_k)*, definida em (2.6), existe em* I_α*; o gráfico de cada* ϕ_k*, para* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *pertence a* $\mathcal{R}$ *e*

$$|\phi_{k+1}(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \ \text{ para todo } \ x \in I_\alpha. \tag{2.10}$$

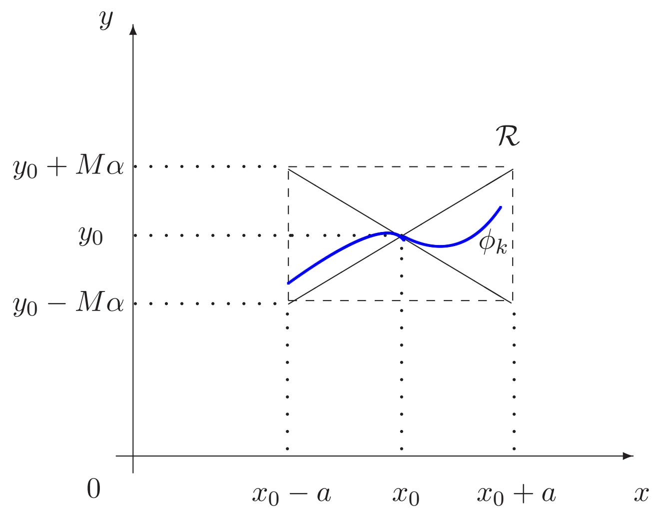
Geometricamente, a desigualdade (2.10) significa que o gráfico de cada ϕ_k pertence a uma região no retângulo $\mathcal{R}$, o qual é limitado pelas retas diagonais

$$y - y_0 = M(x - x_0), \qquad y - y_0 = -M(x - x_0)$$

que se interceptam no ponto (x_0, y_0) e as retas paralelas

$$x - x_0 = \alpha \quad \text{e} \quad x - x_0 = -\alpha$$

conforme a seguinte figura.



Demonstração do Teorema 2.2 - Assumindo verdadeira a desigualdade (2.10), mostra-se que o gráfico de cada ϕ_k está em algum retângulo. De fato, há duas possibilidades:

(i) De (2.8) e (2.9) pode-se ter $|x - x_0| \leq b/M$ para todo $x \in I_\alpha$. Daí e de (2.10) segue que $|\phi_k(x) - y_0| \leq b$ para todo $x \in I_\alpha$. Logo, o gráfico $(x, \phi_k(x))$ de cada ϕ_k pertence ao retângulo $\mathcal{R}$.

(ii) Agora, se $|x - x_0| \leq a$ para todo $x \in I$ então obtém-se $|\phi_k(x) - y_0| \leq b$ para todo $x \in I$, sendo $b = Ma$. Assim, tem-se que os pontos $(x, \phi_k(x))$ pertencem ao retângulo $\widetilde{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ \ |x - x_0| \leq a, \ \ |y - y_0| \leq Ma\}$.

Agora, mostra-se que a desigualdade (2.10) é verdadeira para todo k. Com efeito, por definição $\phi_0(x) = y_0$ existe em I_α; é contínua e satisfaz a desigualdade (2.10) para $k = 0$. Agora, para $k = 1$ tem-se

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt$$

a qual é contínua em I_α, pois $x \mapsto f(x, y_0)$ é contínua em I_α. Usando (2.7) resulta

$$|\phi_1(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \Big| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|dt \leq M|x - x_0|$$

para todo $x \in I_\alpha$. Ou seja, ϕ_1 satisfaz (2.10). Assume-se agora, indutivamente, que a desigualdade (2.10) vale para ϕ_0, ϕ_1, ..., ϕ_k e prova-se a sua validade para ϕ_{k+1}. De fato, como $(x, \phi_k(x)) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in I_\alpha$, f e ϕ_k são contínuas em $\mathcal{R}$ e I, respectivamente então a função $x \mapsto f\left(x, \phi_k(x)\right)$ é contínua em I_α. Portanto,

$$\phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \phi_k(t)\right) dt$$

é derivável em I_α. Além disso,

$$|\phi_{k+1}(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, \phi_k(t)\right)\right| dt \leq M|x - x_0|.$$

Isto mostra que ϕ_{k+1} satisfaz (2.10). Logo, pelo Princípio de Indução Matemática (2.10) vale para todo $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ ■

Convergência das Aproximações Sucessivas

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto não vazio e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função definida por $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Diz-se que f satisfaz a *condição de Lipschitz* na variável y, se existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ para todo } (x, y_1),\ (x, y_2) \in \Omega. \tag{2.11}$$

Se f satisfaz a condição (2.11) diz-se que f é Lipschitz em y e uniforme em x.

A condição de Lipschitz (2.11) permite provar que a sucessão (ϕ_k) das aproximações sucessivas, definidas em (2.6), converge para uma solução do Problema de Cauchy (2.3). Antes de provar este fato mostra-se a seguinte proposição.

Proposição 2.1 *Suponha Ω o retângulo ou $\{(x, y);\ |x - x_0| \leq a,\ \ |y - y_0| \leq b\}$ ou a faixa $\{(x, y);\ |x - x_0| \leq a,\ \ |y| < \infty\}$. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $|\partial_y f(x, y)| \leq L$ para todo $(x, y) \in \Omega$. Então f é Lipschitz em $y \in \Omega$.*

Demonstração - Pela fórmula de Newton-Leibniz tem-se

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \partial_y f(x, t)dt \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Daí

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \int_{y_1}^{y_2} \big|\partial_y f(x, t)\big|dt \leq L|y_2 - y_1|,$$

para todo $(x, y_1),\ \ (x, y_2) \in \Omega$. Logo, f é Lipschitz em $y \in \Omega$ ■

Exemplo 2.2 *(i) A função $f(x,y) = x^2y^2$ é Lipschitz em y no retângulo $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}$, pois $\big|\partial_y f(x,y)\big| = |2x^2y| \leq 4$ para todo $(x,y) \in \mathcal{R}$.*

Esta função não satisfaz uma condição de Lipschitz na faixa

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| \leq 1,\ \ |y| \leq \infty\},$$

pois, se $y > 0$ então $\big|\partial_y f(x,y)\big| = |2x^2y| \to \infty$ quando $|y| \to \infty$ desde que $|x|^2 \neq 0$.

(ii) Seja $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$ a função $f(x,y) = y^{2/3}$ definida em $\mathcal{R}$ não é Lipschitz. De fato,

$$\big|\partial_y f(x,y)\big| = \frac{1}{|y|^{1/3}} \to \infty \ \ \textit{quando}\ \ |y| \to 0.$$

Prova-se agora um teorema de existência de soluções para o PC (2.3).

Teorema 2.3 (Existência de Soluções Locais) *Seja f uma função real e contínua no retângulo $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ tal que $|f(x,y)| \leq M$ para todo $(x,y) \in \mathcal{R}$. Além disso, suponha que f satisfaz a condição (2.11) de Lipschitz em $\mathcal{R}$. Então as aproximações sucessivas*

$$\phi_0(x) = y_0, \ldots, \phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_k(t))dt \ \ \text{com}\ \ k = 0,\, 1,\, \ldots,$$

convergem no intervalo

$$I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| \leq \alpha\}\ \ \text{onde}\ \ \alpha = \min\{a,\ b/M\}$$

para uma função ϕ solução do Problema de Cauchy (2.3) no intervalo $x \in I_\alpha$.

Mostra-se na Lição 5 que a hipótesis de Lipschitz sobre a função f pode ser retirada e obtém-se o mesmo resultado de existência de soluções. A restrição na definição do intervalo I_α se faz necessária para provar apenas a propriedade (ii) da Definição 2.1. As demais propriedades são verificadas para todo x em I.

Demonstração - A demonstração será feita em quatro etapas:

Etapa 1: Convergência da sucessão numérica $(\phi_k(x))$**.** O ponto chave na demonstação é a identidade telescópica

$$\phi_k(x) = \phi_0(x) + (\phi_1(x) - \phi_0(x)) + (\phi_2(x) - \phi_1(x)) + \cdots + (\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x))$$

definida em todo $x \in I$. Ou seja,

$$\phi_k(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^{k} (\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)) \ \ \text{para todo}\ \ x \in I \qquad (2.12)$$

a qual é a soma parcial da série

$$\phi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)) \text{ para todo } x \in I. \tag{2.13}$$

Relembre-se que, se a série (2.13) for convergente então a sucessão numérica $(\phi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ definida em (2.12) será, também, convergente. A série definida em (2.13) é convergente. Com efeito, pelo Teorema 2.2 a sucessão $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existe; é contínua em I e $(x, \phi_k(x)) \in \mathcal{R}$. Além disso,

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| \leq M|x - x_0| \quad \forall x \in I.$$

Como

$$\phi_2(x) - \phi_1(x) = \int_{x_0}^{x}[f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_0(t))]dt$$

então pela hipótese (2.11) e desigualdade (2.10) tem-se

$$\begin{aligned}
|\phi_2(x) - \phi_1(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_0)|dt \\
&\leq L\int_{x_0}^{x} |\phi_1(t) - \phi_0|dt \\
&\leq ML\int_{x_0}^{x} |t - x_0|dt \\
&= ML\int_{x_0}^{x} (t - x_0)dt \quad (\text{ se } \quad x \geq x_0) \\
&= ML\frac{(x - x_0)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Daí, por Indução Matemática conclui-se que

$$|\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)| \leq ML^{j-1}\frac{|x - x_0|^j}{j!} \text{ para } x \in I. \tag{2.14}$$

De fato, constatou-se acima que (2.14) é válida para $j = 1$ e $j = 2$. Assim, assume-se verdade para $j = m$, isto é,

$$|\phi_m(x) - \phi_{m-1}(x)| \leq ML^{m-1}\frac{|x - x_0|^m}{m!} \text{ para } x \in I,$$

e prova-se para $j = m + 1$. Pela definição de ϕ_{m+1} e ϕ_m tem-se

$$\begin{aligned}
|\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_m(t)) - f(t, \phi_{m-1}(t))|dt \\
&\leq L\int_{x_0}^{x} |\phi_m(t) - \phi_{m-1}(t)|dt \quad (\text{pois } f \text{ é } L\text{-Lips.}) \\
&\leq \frac{ML^m}{m!}\int_{x_0}^{x} |t - x_0|^m dt \quad (\text{pela hipótese de indução}) \\
&= \frac{ML^m}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1} \quad (\text{ se } \quad x \geq x_0).
\end{aligned}$$

O caso $x \leq x_0$ é feito de modo análogo. Portanto conclui-se, por Indução Matemática, que a desigualdade (2.14) é válida para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando (2.14) mostra-se que a série (2.13) converge em I_α, pois para todo $x \in I$ a k-ésima soma parcial da série é tal que

$$\begin{aligned} |\phi_0(x)| + \sum_{j=1}^{k} |\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)| &\leq |\phi_0(x)| + \frac{M}{L} \sum_{j=1}^{k} L^j \frac{|x - x_0|^j}{j!} \\ &\leq |\phi_0(x)| + \frac{M}{L} \sum_{j=1}^{\infty} L^j \frac{|x - x_0|^j}{j!} \\ &= |\phi_0(x)| + \frac{M}{L} e^{L|x-x_0|} \leq |\phi_0(x)| + \frac{M}{L} e^{La}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\phi_0(x)| + \sum_{j=1}^{k} |\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)| \leq |y_0| + \frac{M}{L} e^{La} \text{ para todo } I$$

independentemente de k. Assim, tomando $k \to \infty$ nesta desigualdade tem-se que

$$|\phi_0(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)|$$

converge em I. Portanto, a série (2.13) converge absolutamente e uniformemente em I. Logo, a k-ésima soma parcial de (2.13) é convergente. Consequentemente, existe uma função $\phi : I \to \mathbb{R}$ tal que $\phi_k(x) \to \phi(x)$ quando $k \to \infty$ para cada $x \in I$.

Etapa 2: O gráfico de ϕ pertence a $\mathcal{R}$. Deseja-se provar que $(x, \phi(x)) \in \mathcal{R}$. Para isto, é necessário $x \in I_\alpha$. Ou seja, $|\phi(x) - y_0| \leq b$ para $x \in I_\alpha$. Primeiro, note que ϕ é contínua, pois para todo $x_1,\ x_2 \in I$ tem-se

$$|\phi_{k+1}(x_2) - \phi_{k+1}(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t, \phi_k(t)) dt \right| \leq M|x_2 - x_1|.$$

Daí, como $\phi = \lim\limits_{k\to\infty} \phi_k$ resulta que $|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$. Assim, se $x_2 \to x_1$ então $\phi(x_2) \to \phi(x_1)$. Logo, ϕ é contínua em I. Agora, fazendo $x_2 = x$ e $x_1 = x_0$ na última desigualdade obtém-se

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| \leq M|x - x_0| \text{ para todo } x \in I.$$

Como $|x - x_0| \leq \alpha = \min\{a,\ b/M\}$ e assumindo que ϕ é uma solução do PC (2.3) então $\phi(x_0) = y_0$ e daí segue por definição de $\mathcal{R}$ que $(x, \phi(x)) \in R$ para todo $x \in I_\alpha$. Na ETAPA 4 será mostrado que a função limite ϕ é uma solução do PC (2.3).

Etapa 3: Estimativa para $|\phi_k(x)-\phi(x)|$. Por definição

$$\phi_k(x)=\phi_0(x)+\sum_{j=1}^{k}(\phi_j(x)-\phi_{j-1}(x)) \ \text{ para todo } \ x\in I.$$

Sendo ϕ_k convergente então a série

$$\phi(x)=\phi_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(\phi_j(x)-\phi_{j-1}(x)) \ \text{ para todo } \ x\in I$$

converge. Daí, usando (2.14) e a definição de I tem-se

$$\begin{aligned}
|\phi_k(x)-\phi(x)| &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty}|\phi_j(x)-\phi_{j-1}(x)|\\
&\leq \frac{M}{L}\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{L^j|x-x_0|^j}{j!}\leq \frac{M}{L}\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(L\,a)^j}{j!}\\
&= \frac{M}{L}\frac{(L\,a)^{k+1}}{(k+1)!}\Big(1+\frac{L\,a}{(k+2)}+\frac{(L\,a)^2}{(k+2)(k+3)}+\cdots\Big)\\
&\leq \frac{M}{L}\frac{(L\,a)^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(L\,a)^j}{j!}=\frac{M}{L}\frac{(L\,a)^{k+1}}{(k+1)!}e^{L\,a}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$|\phi_k(x)-\phi(x)|\leq\frac{M}{L}\lambda_k e^{L\,a} \ \text{ para todo } \ x\in I, \tag{2.15}$$

onde $\lambda_k=\frac{(L\,a)^{k+1}}{(k+1)!}$. Note que λ_k é o termo geral da série $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(L\,a)^{j+1}}{(j+1)!}$ a qual converge para $e^{L\,a}$. Logo $\lambda_k\to 0$ quando $k\to\infty$. A estimativa (2.15) dá uma taxa de como a sucessão (ϕ_k) das aproximações sucessivas converge para a função ϕ em I.

Etapa 4: A função limite ϕ é solução do problema de Cauchy. Mostra-se que a função ϕ é dada por

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))dt \ \text{ para todo } \ x\in I \tag{2.16}$$

e ela satisfaz a equação integral (2.4). De fato, primeiro observe que ϕ definida em (2.16) está bem definida, pois $x\mapsto f(x,\phi(x))$ é contínua em I. Logo, a integral em (2.16) faz sentido. Agora, usando a hipótese de que f é Lipschitz em y e a desigualdade (2.15) tem-se

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_k(t))dt-\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))dt\Big| &\leq L\int_{x_0}^{x}|\phi_k(t)-\phi(t)|dt\\
&\leq \frac{M}{L}\lambda_k e^{L\,a}|x-x_0|\leq\frac{M\,a}{L}\lambda_k e^{L\,a}.
\end{aligned}$$

Como $\lambda_k \to 0$ quando $k \to \infty$ então

$$\int_{x_0}^{x} f(t, \phi_k(t))dt \to \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt.$$

Daí, para cada k a função ϕ_{k+1} definida por

$$\phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_k(t))dt \ \text{ para todo } \ x \in I$$

converge para a função ϕ definida em (2.16). Logo, a função solução do Problema de Cauchy (2.3) é dada por (2.16) $\blacksquare$

Exercícios da Lição 2

Resolva os Problemas de Cauchy dos Exercícios 2.1 a 2.6 pelo método das aproximações sucessivas.

Exercício 2.1 $\quad y' = y + 1, \ \ y(0) = 2.$

Sug.: Mostre por indução que

$$\phi_k(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}.$$

Em seguida, conclua que ϕ_k converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Para isto, mostre que a série $1 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge. Use o teste da razão. Conclua que sua soma é $\phi(x) = 1 + e^x$.

Exercício 2.2 $\quad y' + y = 0, \ \ y(0) = 1.$

Sug.: Conclua por indução que

$$\phi_k(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Procedendo como no Exercício 2.1, segue que $\phi_k(x) \to e^{-x}$ quando $k \to \infty$.

Exercício 2.3 $\quad y' - 2xy = 0, \ \ y(0) = 1.$

Sug.:

$$\phi_k(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Daí, conclua que $\phi_k(x) \to e^{x^2}$ quando $k \to \infty$.

Exercício 2.4 *No Exercício 2.3 calcule:* $\phi_1(1), \ \phi_2(1), \ \phi_3(1), \ \phi_4(1)$ *e compare com* $\phi(1) = e \simeq 2,718\cdots$.

Exercício 2.5 $\quad y' = 2e^x - y, \ \ y(0) = 1.$

Sug.: **??** Obtenha

$$\phi_{2k}(x) = \sum_{j=0}^{2k} \frac{x^j}{j!} \quad \text{e} \quad \phi_{2k+1}(x) = -\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{x^j}{j!} + 2e^x$$

Daí, conclua que $\phi_k(x)$ definida por $\phi_{2k}(x)$ e $\phi_{2k+1}(x)$ converge para e^x quando $k \to \infty$. Note que, no segundo somatório que define ϕ_{2k+1} há um abuso de notação já que $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

Exercício 2.6 $y' - y^2 = 1, \ \ y(0) = 0.$

(a) *Encontre* $\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3$ *e* ϕ_4.

(b) *Resolva o PC por um outro método estudado que não seja o de aproximações sucessivas.*

Solução: $y = \tan x$.

(c) *Compare o resultado de* (a) *com* (b) *e constate que* ϕ_3 *coincide com os três primeiro termos da série do item* (b).

Sug.: *Verifique que a série de Mclaurin de* $\tan x$ *é*

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \quad \text{com} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 2.7 $y' - 2xy = 2x, \ \ y(0) = 0.$

Sug.: Obtenha por indução que

$$\phi_k(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}$$

e proceda como no Execício 2.1.

Lição 3 – Soluções Globais, Unicidade e Dependência Contínua dos Dados Iniciais

Objetiva-se mostrar a existência de soluções não locais, globais, unicidade de soluções e dependêcia contínua dos dados iniciais para o problema

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.1}$$

Existência de Soluções não Locais e Globais

No Teorema 2.3 é estabelecido a existência de soluções para o Problema de Chauchy (3.1) no intervalo $I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| < \alpha\}$ com $\alpha = \min\{a,\ b/M\}$. Há casos de existência de soluções em todo intervalo $I = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| < a\}$ sem restrições sobre a. Neste caso, diz-se que a solução do Problema de Cauchy é uma *solução não local.* Para esta situação tem-se o teorema.

Teorema 3.1 (Existência de soluções não locais) *Seja f uma função contínua definida na faixa $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x - x_0| \leq a,\ \ |y| < \infty\}$ com valores reais e satisfazendo a condição (2.11) de Lipschitz em Ω. Então as aproximações sucessivas*

$$\phi_0(x) = y_0, \ldots, \phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_k(t))dt \ \text{ com } \ k = 0,\, 1,\, \ldots$$

convergem no intervalo $I = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| \leq a,\ \ a > 0\}$ para uma função ϕ solução do Problema de Cauchy (3.1) em I.

Demonstração - O Teorema 2.2 guarante a existência da sucessão das aproximações sucessivas $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $I_\alpha \subset I$. Sendo f contínua em Ω então a função $x \mapsto f(x, y_0)$ é contínua em I. Assim, existe uma constante $\widetilde{M} > 0$ tal que

$$|f(x,y_0)| \leq \widetilde{M} \ \text{ para todo } \ x \in I.$$

Daí, obtém-se

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \Big| \leq \widetilde{M}|x - x_0|.$$

Repetindo o processo acima para $\phi_2,\ \phi_1$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\phi_2(x) - \phi_1(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} [f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_0(t))]dt \Big| \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} |\phi_1(t)) - \phi_0(t)|dt \\
&\leq \frac{\widetilde{M}}{2!} L|x - x_0|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, por Indução Matemática verifica-se

$$|\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)| \leq \frac{\widetilde{M}}{L} \frac{L^j |x - x_0|^j}{j!} \quad \text{para } x \in I. \tag{3.2}$$

A demonstração da convergência de $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é feita de modo similar à Etapa 1 do Teorema 2.3 usando a desigualdade (3.2).

A função ϕ definida como limite de $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz, conforme Etapa 2 do Teorema 2.3, a desigualdade

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq \widetilde{M}|x_1 - x_2|.$$

O que implica ϕ ser contínua em I.

Por outro lado, usando a desigualdade (3.2) tem-se para todo $x \in I$, que

$$\begin{aligned} |\phi_k(x) - y_0| &= \Big| \sum_{j=1}^{k} [\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)] \Big| \leq \sum_{j=1}^{k} |\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)| \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{L} \sum_{j=1}^{k} \frac{L^j |x - x_0|^j}{j!} \leq \frac{\widetilde{M}}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L^j |x - x_0|^j}{j!} \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(L\,a)^j}{j!} = \frac{\widetilde{M}}{L} \left(e^{L\,a} - 1 \right). \end{aligned}$$

Assim, sendo $b = \frac{\widetilde{M}}{L}\left(e^{L\,a} - 1\right)$ tem-se

$$|\phi_k(x) - y_0| \leq b \quad \text{para todo } x \in I.$$

Tomando o limite, $k \to \infty$, resulta

$$|\phi(x) - y_0| \leq b \quad \text{para todo } x \in I.$$

Note que no retângulo $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ a função f é contínua. Assim existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$. Assim, o restante da demonstração é similar às **etapas** 3 e 4 do Teorema 2.3 ■

Exemplo 3.1 *Como uma aplicação do Teorema 3.1 considere o Problema de Cauchy*

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0 \;\text{ com }\; f(x, y) = -g(x)y + h(x), \tag{$*$}$$

onde g e h são funções contínuas em $I = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq a,\ \ a > 0\}$.

Como a equação é linear, g e h são contínuas, viu-se que o Problema de Cauchy $(*)$ têm soluções *soluções não locais*, isto é, em I. O Teorema 3.1 estabelece soluções não locais, desde que f satisfaça a condição (2.11) de Lipschitz em uma faixa.

O prblema $(*)$ é deste tipo, pois sendo g contínua em I existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Portanto,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |-g(x)(y_1 - y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

para (x, y_1), (x, y_2) na faixa $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x - x_0| \leq a,\ \ |y| < \infty\}$ ∎

A existência de soluções globais para o Problema de Cauchy (3.1) é uma consequência imediata do Teorema 3.1, conforme colorário a seguir.

Corolário 3.1 (Existência de Soluções Globais) *Seja f uma função contínua definida em $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < \infty,\ |y| < \infty\}$ com valores reais e Lipschitz em cada faixa $\Omega_{\mathrm{a}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq \mathrm{a},\ |y| < \infty\}$, com a constante L podendo depender de* a, *onde* a *é um real positivo qualquer. Então o Problema de Cauchy (3.1) tem solução para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração - Seja x um real qualquer. Então existe um real $a > 0$ tal que x pertence ao intervalo $|x - x_0| \leq a$. ([2]) Para este a a função f satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1 na faixa $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x - x_0| \leq a,\ |y| < \infty\}$ a qual está contida na faixa

$$|x| \leq a + |x_0|,\ \ |y| < \infty.$$

Assim, a sucessão das aproximações sucessivas, $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definida para todo x em $|x| < \infty$ existe e converge para uma função ϕ solução do Problema de Cauchy (3.1) em $|x| < \infty$ ∎

Como uma aplicação deste corolário considera-se o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2 $\quad y' = \dfrac{y^3x^2}{y^2 + 1},\ \ y(x_0) = y_0.$

A função não linear $f(x, y) = \dfrac{y^3x^2}{y^2 + 1}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e $\partial_y f(x, y) = \dfrac{(y^4 + 2y^2)x^2}{(y^2 + 1)^2}$. Considerando f definida na faixa $\Omega_{\mathrm{a}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq \mathrm{a},\ |y| < \infty\}$, tem-se que $|\partial_y f(x, y)| \leq \mathrm{a}^2$ para todo $(x, y) \in \Omega_{\mathrm{a}}$. Assim, pelo Teorema 3.1 a função f satisfaz uma condição de Lipschitz em Ω_{a} com a constante $L = \mathrm{a}^2$. Logo, pelo Corolário 3.1 o problema de valor inicial acima tem uma solução em todo $\mathbb{R}$.

A hipótese de Lipschitz sobre f na faixa Ω_{a} é indispensável para obter soluções globais, conforme exemplo a seguir.

Exemplo 3.3 $\quad y' = y^2,\ \ y(1) = -1.$

Sendo $f(x, y) = y^2$ tem-se $\partial_y f(x, t) = 2y$. Assim, $|\partial_y f(x, y)| = 2|y| < \infty$. Logo, f não satisfaz uma condição de Lipschitz em Ω_{a}. Neste exemplo, vê-se que uma

[2] A Propriedade Arquimediana assegura que: dado $z \in \mathbb{R}$ existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < n$. Em particular, se $y = x - x_0$ com x, $x_0 \in \mathbb{R}$ então $|x - x_0| < n$.

solução da equação é dada por $\phi(x) = -1/x$, a qual para satisfazer a condição inicial é necessária ser definida para $x > 0$. Logo, a solução deste Problema de Cauchy não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$ ■

Unicidade e Dependência Contínua dos Dados Iniciais

Nas condições dos Teoremas 2.3, 3.1 e Corolário 3.1 mostra-se que a solução do Problema de Cauchy (3.1) é única.

Teorema 3.2 (Unicidade de Soluções) *Seja f contínua e satisfazendo a condição (2.11) de Lipschitz no retângulo $\mathcal{R}$. Se ϕ e ψ são duas soluções do Problema de Cauchy (3.1) em I então $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I$.*

Demonstração - Se

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \quad \text{e} \quad \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))dt \quad \text{em} \quad I$$

são duas soluções do Problema de Cauchy (3.1) então

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))]dt.$$

Daí, sendo f Lipschitz na segunda variável obtém-se

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt. \tag{a}$$

Seja $E(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt$. Então $E'(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$ e por (a) obtém-se

$$E'(x) - LE(x) \leq 0.$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{-L|x-x_0|}$ resulta

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-L|x-x_0|}E(x)\right] \leq 0.$$

Integrando de x_0 a x e usando que $E(x_0) = 0$ tem-se pela Fórmula de Newton-Leibniz, que

$$e^{-L|x-x_0|}E(x) \leq 0.$$

Assim, $E(x) \leq 0$. Como $E(x) \geq 0$ então $E(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, pela definição de $E(x)$ resulta $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I$ ■

Observação 3.1 *A condição de Lipschitz sobre uma variável de f para a obtenção da unicidade de soluções é* **indispensável**. *De fato, se*

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0 \;\text{ e }\; f(x, y) = 3y^{2/3}$$

então f é contínua para todo ponto do $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, as duas funções $\phi(x) = x^3$ e $\psi(x) = 0$ definidas em $\mathbb{R}$ são ambas soluções do problema. Todavia, como foi visto no Exemplo 2.2 item 2, a função $f(x,y) = y^{2/3}$ não satisfaz uma condição de Lipschitz em um retângulo contendo a origem. Por isto, foi possivel obter-se mais de uma solução ■

Um Teorema bastante útil para demonstrar unicidade de soluções de EDO (veja Exercício 3.7) é o chamado de Lema de Gronwall, a saber

Lema 3.1 (Lema de Gronwall) *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varphi(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Se*

$$\varphi(x) \leq \kappa_0 + \kappa_1 \int_a^x \varphi(t)dt \quad \text{para} \quad x \in [a,b], \tag{i}$$

com as constantes $\kappa_0 \geq 0$, $\kappa_1 > 0$ então

$$\varphi(x) \leq \kappa_0 e^{\kappa_1 (x-a)} \quad \textit{para todo} \quad x \in [a,b].$$

Note que se, em particular, $\kappa_0 = 0$ então $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração - Seja $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Então, $\psi'(x) = \varphi(x)$ e da hipótese (i) obtém-se $\psi'(x) \leq \kappa_0 + \kappa_1 \psi(x)$. Multiplicando ambos os membros por $e^{-\kappa_1 x}$ resulta

$$\frac{d}{dt}\left\{\psi(t)e^{-\kappa_1 t}\right\} \leq \kappa_0 e^{-\kappa_1 t}.$$

Integrando de a a x obtém-se

$$\psi(x)e^{-\kappa_1 x} \leq -\frac{\kappa_0}{\kappa_1}\big(e^{-\kappa_1 x} - e^{-\kappa_1 a}\big).$$

Ou seja, $\psi(x) \leq -\frac{\kappa_0}{\kappa_1}\big(1 - e^{\kappa_1 (x-a)}\big) = \frac{\kappa_0}{\kappa_1}\big(e^{\kappa_1(x-a)} - 1\big)$. De (i) e da definição de ψ tem-se que $\varphi(x) \leq \kappa_0 + \kappa_1 \psi(x)$. Logo

$$\varphi(x) \leq \kappa_0 + \kappa_0\big(e^{\kappa_1(x-a)} - 1\big) = \kappa_0 e^{\kappa_1(x-a)} \quad ■$$

Proposição 3.1 *Suponha f satisfazendo as hipóteses dos Teoremas de existência de soluções, por exemplo Teorema 3.1. Se ϕ e ψ são duas soluções do Problema de Cauchy (3.1) em I correspondente aos dados iniciais y_0 e $\widetilde{y}_0$, respectivamente então*

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq |y_0 - \widetilde{y}_0| e^{L\,|x-x_0|} \quad \textit{para todo} \;\; x \in I.$$

Demonstração - Sejam

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \quad \text{e} \quad \psi(x) = \widetilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))dt \quad \text{em} \quad I$$

duas soluções do Problema de Cauchy (3.1). Pelo fato de f ser Lipschitz tem-se

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq |y_0 - \widetilde{y}_0| + L \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt.$$

O resto da demonstração é uma consequência do Lema de Gronwall ■

Uma solução ϕ do Problema de Cauchy (3.1) depende continuamente do dado inicial y_0 quando y_0 sofrer pequenas variações então a solução ϕ, também, soterá essas variações. De modo mais preciso tem-se o seguinte teorema.

Teorema 3.3 (Dependência Contínua dos Dados Iniciais) *Seja f contínua e satisfazendo a condição de Lipschitz (2.11) no retângulo $\mathcal{R}$. Suponha que, além da condição inicial $y(x_0) = y_0$ existe uma outra dada por $y(x_0) = y_1$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (δ pode depender de ϵ) tal que*

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon \ \textit{desde que} \ |y_0 - y_1| \leq \delta.$$

Onde ϕ e ψ são soluções do Problema de Cauchy (3.1) em I associadas aos dados iniciais y_0 e y_1 respectivamente.

Demonstração - Estando f nas condições das hipóteses do Teorema 3.1 então existem em I duas funções

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \quad \text{e} \quad \psi(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))dt$$

soluções do PC (3.1) associadas aos dados iniciais y_0 e y_1 respectivamente.

Como $|y_0 - y_1| \leq \delta$ e f é Lipschitz na segunda variável obtém-se

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta + L \int_{x_0}^{x} \big|\phi(t)) - \psi(t)\big|dt. \tag{a}$$

Daí, se

$$E(x) = \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt,$$

tem-se $E'(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$ e $E'(x) - LE(x) \leq \delta$. Multiplicando ambos os membros por $e^{-L|x-x_0|}$ resulta

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{-L|t-x_0|}E(t)\Big] \leq \delta e^{-L|t-x_0|}.$$

Integrando de x_0 a x e como $E(x_0) = 0$ então pela Fórmula de Newton-Leibniz tem-se

$$e^{-L|x-x_0|}E(x) \leq \delta \int_{x_0}^{x} e^{-L|t-x_0|}dt = \frac{\delta}{L}\Big[1 - e^{-L|x-x_0|}\Big].$$

A integral acima é calculada primeiro para $x \geq x_0$. De modo similar faz-se para $x \leq x_0$. Assim,

$$E(x) \leq \frac{\delta}{L}\Big[e^{L|x-x_0|} - 1\Big].$$

Substituindo esta desigualdade em (a) resulta

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta + \delta\Big[e^{L|x-x_0|} - 1\Big] = \delta e^{L|x-x_0|} \text{ para todo } x \in I.$$

Sendo $x \in I$ tem-se $|x - x_0| \leq a$. Portanto, $|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta e^{La}$. Daí, para cada $\epsilon > 0$ dado escolhe-se $\delta = \epsilon/e^{La}$ os quais implicam

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon \text{ desde que } |y_0 - y_1| \leq \delta \quad \blacksquare$$

Exercícios da Lição 3

Exercício 3.1 *Determine a constante L de Lipschitz em:*

(a) $f(x,y) = x^3 e^{-xy}$ *em* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq a,\ |y| < \infty\}$;

(b) $f(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y$ *em* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ |y| < 1\}$ *onde* a, b *pertencem a* $C^0([-1,1])$.

Exercício 3.2 *Dado* $f(x,y) = y^{1/3}$ *mostre que:*

(a) f *não é Lipschitz no retângulo*

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\};$$

(b) f *é Lipschitz em* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq a,\ 0 < b \leq y \leq c\}$. *Determine a constante de Lipschitz.*

Exercício 3.3 *Mostre que* $f(x,y) = x^2|y|$ *é Lipschitz em* y *e determine a constante* L *em* $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$. *A* $\partial_y f$ *existe em* $(x,0)$ *com* $x \neq 0$*?*

Exercício 3.4 *Considere o PC*

$$y' = 1 - 2xy, \quad y(0) = 0. \tag{$*$}$$

(a) *Apesar do PC* $(*)$ ser linear não é "fácil" determinar uma solução explicitamente. Constate que uma solução é a função

$$\phi(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt,$$

a qual não tem uma primitiva.

(b) Mostre que em $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq 1/2,\ |y| \leq 1\}$ a função f definida por $(*)$ é lipschitziana com $L = 1$.

(c) Conclua pela teoria desenvolvida que sucessão das aproximações sucessivas, (ϕ_k), converge para uma solução ϕ em $I = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 1/2\}$.

(d) Mostre que ϕ_3 satisfaz $|\phi(x) - \phi_3(x)| \leq 1/10$ em I.

Exercício 3.5 *Seja* $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ *onde* $f : \Omega_\mathrm{a} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x, y) = \frac{y^3 e^{x+1}}{y^2 + 1} + x^2 \cos y$$

e $\Omega_\mathrm{a} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| \leq \mathrm{a},\ \ |y| < \infty\}$. *Mostre que este PC (não linear) tem pelo menos uma solução em* $\mathbb{R}$

Sug.: Mostre, inicialmente, que f satisfaz uma condição de Lipschitz sobre y em Ω_a com constante $L = e^{\mathrm{a}+1} + \mathrm{a}^2$. E conclua a existência de soluções por meio do Corolário 3.1.

Exercício 3.6 *Suponha* $f,\ g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções e consider os Problemas de Cauchy*

$$y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_1 \quad \text{e} \quad y' = g(x, y),\ \ y(x_0) = y_2, \tag{a}$$

com $(x_0, y_1),\ (x_0, y_2) \in \mathcal{R}$. *Mostre que, se* f *e* g *são contínuas, Lipschitz na segunda variável em* $\mathcal{R}$, *e que existem constantes* $\epsilon \geq 0,\ \ \delta \geq 0$ *tais que*

$$|f(x, y) - g(x, y)| \leq \epsilon,\ \ \forall\, (x, y) \in \mathcal{R} \quad \text{e} \quad |y_1 - y_2| \leq \delta \tag{b}$$

então as funções $\phi,\ \psi$ *soluções no sentido da Definição 2.1 de* $(a)_1$, $(a)_2$ *respectivamente, satisfazem*

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta e^{L|x-x_0|} + \frac{\epsilon}{L}\Big(e^{L|x-x_0|} - 1\Big) \ \ \textit{para todo}\ \ x \in I.$$

O exercício afirma que: estando f *próxima de* g *e* y_1 *próximo de* y_2 *então a solução* ϕ *definida em* I *de* $(a)_1$ *está próxima da a solução* ψ *definida em* I *de* $(a)_2$.

Sug.: - Pelo Teorema 3.1 tem-se que as funções

$$\phi(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \quad \text{e} \quad \psi(x) = y_2 + \int_{x_0}^{x} g(t, \psi(t))dt$$

definidas em I são soluções de $(\mathrm{a})_1$ e $(\mathrm{a})_2$, respectivamente. Daí,

$$\phi(x) - \psi(x) = y_1 - y_2 + \int_{x_0}^{x} [f(t, \phi(t)) - g(t, \psi(t))]dt.$$

Somando e subtraindo $f(t, \psi(t))$ no integrando obtém-se

$$\begin{aligned}\phi(x) - \psi(x) &= y_1 - y_2 + \int_{x_0}^{x} [f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))] dt \\ &+ \int_{x_0}^{x} [f(t, \psi(t)) - g(t, \psi(t))] dt.\end{aligned}$$

Agora, repete-se para $x \geq x_0$ as etapas da demonstração do Teorema 3.3 obtendo

$$e^{-L(x-x_0)} E(x) \leq \delta \int_{x_0}^{x} e^{-L(t-x_0)} dt + \epsilon \int_{x_0}^{x} (t - x_0) e^{-L(t-x_0)} dt.$$

Integrando por substituição e por partes ([3]) a primeira e a segunda integral resulta

$$E(x) \leq \frac{\delta}{L} \Big[e^{L(x-x_0)} - 1 \Big] - \frac{\epsilon}{L^2} \big[L(x - x_0) + 1 \big] + \frac{\epsilon}{L^2} e^{L(x-x_0)}.$$

Repita o restante das etapas do Teorema 3.3 para concluir a demonstração.

Como consequências do Exercício 3.6 tem-se a unicidade de soluções e aproximações de soluções associadas ao Problema de Cauchy (3.1). Estes são os objetivos dos Exercícios 3.7 e 3.8.

Exercício 3.7 *Seja f contínua e satisfazendo uma condição de Lipschitz no retângulo $\mathcal{R}$. Se ϕ e ψ são duas soluções do Problema de Cauchy (3.1) em I então $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I$.*

Sug.: - Se $f(x, y) = g(x, y)$ para todo (x, y) em $\mathcal{R}$ e $y_1 = y_2$ então pode-se escolher $\epsilon = \delta = 0$. Assim, supondo duas soluções do Problema de Cauchy (3.1) conclua pelo Exercício 3.6 que $|\phi(x) - \psi(x)| \leq 0$ para todo $x \in I$. O que mostra $\phi \equiv \psi$ em I ■

Exercício 3.8 *Seja f nas condições do Exercício 3.6 e g_κ para $\kappa = 1, 2, \cdots$ funções contínuas em $\mathcal{R}$ satisfazendo*

$$|f(x, y) - g_\kappa(x, y)| \leq \epsilon_\kappa, \quad \forall (x, y) \in R \quad \text{e} \quad |y_\kappa - y_1| \leq \delta_\kappa$$

com as constantes ϵ_κ, $\delta_\kappa \to 0$ quando $\kappa \to \infty$. Mostre, por meio da desigualdade (b) do Exercício 3.6, que as funções ψ_κ soluções de $y' = g_\kappa(x, y)$, $y(x_0) = y_\kappa$ em I convergem para a função ϕ solução do PC $(a)_1$ do Exercício 3.6 em I.

Exercício 3.9 *Mostre que o Problema de Cauchy $y' = y + \lambda x^2 \text{sen} y$, $y(0) = 1$ e $|\lambda| \leq 1$ tem solução em $I = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 1\}$, e que a solução ϕ satisfaz a desigualdade*

$$|\phi(x) - e^x| \leq |\lambda| \big(e^{|x|} - 1 \big).$$

[3] Se $u = t$ e $dv = e^{\kappa t} dt$ então $\int t e^{\kappa t} dt = \frac{1}{\kappa^2} (\kappa t - e^{\kappa t})$ para $\kappa \neq 0$.

Sug.: ...

Exercício 3.10 *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que para todo* (x_1, y_1, λ), $(x_2, y_2, \lambda) \in \Omega$ *tem-se*

$$|f(x_1, y_1, \lambda) - f(x_2, y_2, \lambda)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ com } L > 0,$$

onde

$$\Omega = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3;\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b,\ |\lambda - \lambda_0| \leq c\}.$$

Suponha, ainda, que $\partial_\lambda f(x, y, \lambda) \leq \kappa$ *para todo* $(x, y, \lambda) \in \Omega$. *Se* ϕ_λ *é uma solução do PC* $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(x_0) = y_0$, *mostre que*

$$|\phi_\lambda(x) - \phi_\nu(x)| \leq \frac{1}{L}\kappa|\lambda - \nu|\big(e^{L|x-x_0|} - 1\big)$$

para todo x *no domínio de* ϕ_λ *e* ϕ_ν.

Sug.: ...

Exercício 3.11 *Mostre, por meio do Lema de Gronwall, que o PC (3.1) para* f *nas condições das hipóteses do Teorema 3.2 tem uma única solução.*

Sug.: - Considerando as funções ϕ e ψ da demonstração do Teorema 3.2 defina por $\zeta(x) = \phi(x) - \psi(x)$ em $I = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq \alpha\}$ e conclua que

$$|\zeta(x)| \leq L\int_{x_0}^{x} |\zeta(t)|dt.$$

Exercício 3.12 *O Exercício (3.10) pode ser melhorado supondo-se* f *Lipschitz em y mas não unifrome em* x. *Ou seja, supondo que exista uma função* $m = m(x)$ *não negativa e integrável em* I *tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq m(x)|y_1 - y_2| \text{ para todo } (x, y_1),\ (x, y_2) \in \mathcal{R}.$$

Constate este fato!

Lição 4 – Teorema do Ponto Fixo de Banach

Objetiva-se estabelecer a existência de soluções para o problema de Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.1}$$

em espaços não finitamente gerado. Isto será feito por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Antes, porém, faz-se uma breve introdução sobre alguns conceitos e resultados em *espaços vetorias de funções.*

O conteúdo desta Lição e das Lições 5, 6 e 7 está essencialmente na referência Medeiros [7].

Espaços Métricos

Definição 4.1 *Sejam X um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função tal que para todo x, y, $z \in X$, satisfaz*

(M1) d *têm valores finitos e não negativos;*

(M2) $d(x, y) = 0$ *se, somente se,* $x = y$*;*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Desigualdade Triangular).*

A função d acima definida é chamda de **métrica ou função distância em** *X. As propriedades (M1)-(M4) são chamadas de axiomas de uma métrica.*

Definição 4.2 *Espaço métrico é um par (X, d) que satisfaz a Definição 4.1.*

Exemplo 4.1 *Alguns exemplos de espaços métricos.*

(a) *Em $X = \mathbb{R}$ a função distância $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$ para todo x, $y \in \mathbb{R}$, onde $|\cdot|$ é o valor absoluto em $\mathbb{R}$. A reta real $\mathbb{R}$ é um espaço métrico;*

(b) *O Plano carteziano $\mathbb{R}^2$ é um espaço métrico tanto com a métrica euclidiana: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ como a métrica amplitude: $d(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, sendo $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$;*

(c) *O espaço de sequência $X = \ell^\infty$ definido como o cunjunto de todas as sequências de números complexos limitadas. Ou seja, todo elemento de X é uma sequência complexas $x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ tal que $|\alpha_j| \leq \kappa$ com $\kappa > 0$ independente de j. Com a métrica $d(x, y) = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_j - \beta_j|$ onde $y = (\beta_1, \beta_2, \cdots) \in X$, tem-se que o par (ℓ^∞, d) é um espaço métrico;*

(d) *O espaço ℓ^p para $p \geq 1$ real é o cunjunto das sequências de números complexos $x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ tal que $|\alpha_1|^p + |\alpha_2|^p + \cdots$, converge. Ou seja, $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p < \infty$ com $p \geq 1$ fixo. Com a métrica $d(x, y) = \big(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j - \beta_j|^p\big)^{1/p}$ o ℓ^p é espaço métrico;*

(e) *O conjunto $C^0([a, b])$ das funções contínuas definidas em $[a, b]$ com valores em $\mathbb{R}$ com a métrica $d(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ com $f, g \in C^0([a, b])$ é espaço métrico.*

Sequência de Cauchy e Espaço Métrico Completo

Definição 4.3 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (X, d) é dita* **convergente em** *X, se existir um $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Assim, x é chamado de limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e escreve-se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.*

Para simplificar a notação daqui em diante, X denotará o espaço métrico (X, d).

Definição 4.4 (i) *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico X é chamada* **Sequência de Cauchy** *se para $\epsilon > 0$ dado existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para todo $m, n > N$.*

(ii) *O espaço métrico X é dito* **completo**, *se toda sequência de Cauchy em X é convergente, isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.*

Exemplo 4.2 *Alguns exemplos de espaços métricos completos.*

(a) *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com a métrica $d(x, y) = |x - y|$;*

(b) *$\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com a métrica euclidiana $d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2\Big)^{1/2}$, onde $x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ e $y = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$;*

(c) *O espaço ℓ^p com $1 \leq p < \infty$ é completo;*

(d) *O espaço métrico das funções contínuas $C^0([a, b])$ é completo com a métrica do Exemplo 4.1 item* (e).

Exemplo 4.3 *Alguns exemplos de espaços métricos não completos.*

(a) *O par (X, d) onde $X =]0, 1]$ e $d(x, y) = |x - y|$ não é um espaço métrico completo. De fato, primeiro note que (X, d) é um espaço métrico. Todavia, não é completo, pois se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $x_n = 1/n$ então $x_n \in X$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X. Contudo, ela não converge para um ponto de X, haja vista que $x_n \to 0 \notin X$;*

(b) $X = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ *com a métrica usual* $d(x, y) = |x - y|$ *não é um espaço métrico completo, pois se* $x_n = 1/n + x_0 \in X$ *então* $x_n \to x_0 \notin X$*;*

(c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ *com* $d(x, y) = |x - y|$*, também, não é completo;*

(d) *O espaço métrico das funções contínuas* $C^0([0, 1])$ *com a métrica definida por*

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$

não é completo. ([4])

Observe que no Exemplo 4.2 (e) e Exemplo 4.3 (d) o espaço vetorial é o mesmo e um é completo e o outro não. Isto ocorre porque $C^0([a, b])$ não é um espaço vetorial finitamente gerado, isto é, não é de dimensão finita. Nos espaços de dimensões finitas todas as normas são equivalentes. ([5])

Contração e Ponto Fixo

Considerando X um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma função. A meta agora é estabelecer condições sobre T de modo que ela possua um único ponto fixo.

Definição 4.5 (i) *O ponto* $x_0 \in X$ *é um* **ponto fixo** *de* T *se, e somente se,* $T(x_0) = x_0$.

(ii) *A função* $T : X \to X$ *é uma* **contração** *se, e somente se, existe* $\kappa \in]0, 1[$ *tal que* $d(T(x_1), T(x_2)) \leq \kappa d(x_1, x_2)$ *para todo* x_1, $x_2 \in X$.

Note que toda contração é uma função contínua. Aliás, uniformemente contínua em seu domínio.

Teorema 4.1 **(Teorema do Ponto Fixo de Banach)** *Seja* X *um espaço métrico completo. Se* $T : X \to X$ *é uma contração então* T *possui um único ponto fixo.*

Demonstração - Seja $x \in X$ um vetor qualquer. Será mostrado que $Tx = x$. De fato, considera-se a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n \in X$ definida por

$$x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1),\ x_3 = T(x_2),\ \ldots,\ x_n = T(x_{n-1}),\ \ldots \qquad \text{(a)}$$

Esta sequênica está bem definida, pois T é contínua. Mostra-se a seguir que ela é convergente. De fato, basta mostrar que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois

[4]Veja Erwin Kreyszig [6] pag. 38 ou Exercício 4.4.
[5]Veja Wendell Fleming [4] pag. 72.

X é um e. m. completo. Pela desigualdade triangular generalizada e para $n > m$ tem-se

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n). \tag{b}$$

Pela definição de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e sendo T contração obtém-se

$$\begin{aligned}
d(x_{m+1}, x_{m+2}) &= d(T(x_m), T(x_{m+1})) \leq \kappa d(x_m, x_{m+1}) \\
d(x_{m+2}, x_{m+3}) &= d(T(x_{m+1}), T(x_{m+2})) \leq \kappa d(x_{m+1}, x_{m+2}) \leq \kappa^2 d(x_m, x_{m+1}) \\
\vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
d(x_{m+p-1}, x_{m+p}) &= d(T(x_{m+p-2}), T(x_{m+p-1})) \leq \kappa^{p-1} d(x_m, x_{m+1}).
\end{aligned}$$

Agora limita-se superiormente $d(x_{n-1}, x_n)$ em termos de $d(x_m, x_{m+1})$. Se $n > m$ então existe p tal que $n = m + p$. Logo, pelo cálculo anterior resulta

$$\begin{aligned}
d(x_{n-1}, x_n) &= d(x_{m+p-1}, x_{m+p}) = d(T(x_{m+p-2}), T(x_{m+p-1})) \\
&\leq \kappa^{p-1} d(x_m, x_{m+1}) = \kappa^{n-m-1} d(x_m, x_{m+1}).
\end{aligned}$$

Daí, segue por (b) que

$$d(x_m, x_n) \leq \left(1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots + \kappa^{n-m-1}\right) d(x_m, x_{m+1}).$$

Sendo $\kappa \in]0, 1[$ tem-se

$$1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots + \kappa^{n-m-1} + \cdots = \frac{1}{1-\kappa}.$$

Como

$$1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots + \kappa^{n-m-1} < 1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots + \kappa^{n-m-1} + \cdots = \frac{1}{1-\kappa}$$

então

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{d(x_m, x_{m+1})}{1-\kappa}. \tag{c}$$

Repetindo o raciocínio anterior obtém-se

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(x_{1+(m-1)}, x_{m+1}) \leq \kappa^{m-1} d(x_1, x_2).$$

Substituindo em (c) resulta

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\kappa^{m-1}}{1-\kappa} d(x_1, x_2). \tag{d}$$

Note que $a_m = \dfrac{\kappa^{m-1}}{1-\kappa}$ é o termo geral de uma série geométrica convergente, pois $\kappa \in]0, 1[$. Logo, $a_m \to 0$ quando $m \to \infty$. Assim, de (d) tem-se que

$$d(x_m, x_n) \to 0 \ \text{ quando } \ m, n \to \infty.$$

Logo (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Portanto converge em X, pois X é completo. Consequentemente, existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Este ponto limite é um ponto fixo de T. De fato, por (a) tem-se que $x_n = T(x_{n-1})$. Então quando $n \to \infty$ resulta que $x = T(x)$, pois T é contínua em X.

A unicidade do ponto fixo x de T é obtida supondo que $\widetilde{x}$ é um outro ponto fixo de T. Assim, como

$$d(T(x), T(\widetilde{x})) \leq \kappa d(x, \widetilde{x})$$

então

$$d(x, \widetilde{x}) \leq \kappa d(x, \widetilde{x}).$$

Daí, $(1-\kappa)d(x,\widetilde{x}) \leq 0$. Como $\kappa \in]0,1[$ resulta que $d(x,\widetilde{x}) = 0$. Logo, $x = \widetilde{x}$ ■

Exemplo 4.4 (a) *Seja $f(x) = x^2$. Os únicos pontos fixos de f são* 0 *e* 1*. Observe que f não é contração.*

(b) *A função $f(x) = 1$ tem o ponto $x = 1$ como o único ponto fixo. Observe que, também, f não é necessariamente contração.*

(c) *Todo ponto x é um ponto fixo da função $f(x) = x$. Note que, também, f não é contração.*

(d) *A função $f(x) = \ln x$ para todo $x \geq a > 1$ tem um único ponto fixo. De fato, pelo teorema do valor médio para derivadas existe ξ entre x_1 e x_2 tal que $|\ln x_1 - \ln x_2| = \frac{1}{\xi}|x_1 - x_2|$. Como $\xi \geq a > 1$ então $\frac{1}{\xi} \leq \frac{1}{a} < 1$. Assim, $d(\ln x_1, \ln x_2) \leq \kappa d(x_1, x_2)$ para $\kappa \in]0,1[$ com $d(x_1,x_2) = |x_1 - x_2|$. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach tem-se o resultado.*

Teorema 4.2 *Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Se alguma potência T^m de T é uma contração então T possui um único ponto fixo.*

Demonstração - Suponha $m \in \mathbb{N}$ tal que T^m é uma contração. Então pelo Teorema 4.1 existe $x_0 \in X$ tal que

$$x_0 = T^m x_0. \tag{i}$$

Para $p \in \mathbb{N}$ tem-se que $(T^m)^p$ é, também, uma contração. Assim, $(T^m)^p x_0 = x_0$ e $\lim_{p\to\infty} (T^m)^p x_0 = x_0$. Sendo T contínua resulta que

$$\lim_{p\to\infty} (T^m)^p T x_0 = T x_0. \tag{ii}$$

Além disso, sendo $(T^m)^p$ uma contração existe $\kappa \in]0,1[$ tal que

$$d\left((T^m)^p T x_0, (T^m)^p x_0\right) \leq \kappa^p d(T^m T x_0, T^m x_0). \tag{iii}$$

Usando (i) tem-se que $d(T^mTx_0, T^mx_0) = d(Tx_0, x_0)$. Portanto, de (iii) resulta

$$d((T^m)^pTx_0, (T^m)^px_0) \leq \kappa^p d(Tx_0, x_0).$$

De (ii) tem-se que

$$d(Tx_0, x_0) = d\Big(\lim_{p\to\infty}(T^m)^pTx_0, \lim_{p\to\infty}(T^m)^px_0\Big).$$

Das duas últimas relações acima obtém-se $d(Tx_0, x_0) \leq \kappa^p d(Tx_0, x_0)$. Consequentemente, $(1-\kappa^p)d(Tx_0, x_0) \leq 0$. Como $1-\kappa^p > 0$ então $d(Tx_0, x_0) = 0$. O que acarreta $Tx_0 = x_0$ ■

Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Mostrou-se no Teorema 2.1 que estudar o Problema de Cauchy (4.1) é equivalente a estudar a equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

O objetivo agora é mostrar por meio do Teorema do Ponto Fixo de Banach 4.1 que esta equação tem uma única solução. Primeiro, estuda-se o PC (4.1) em um retângulo fechado e limitado $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ e em seguida em um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Aplicação I Seja $f : \mathcal{R} = I_\alpha \times J \to \mathbb{R}$ uma função onde

$$I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq \alpha\},\ \ \alpha = \min\{a, b/M\}\ \text{ e }\ J = \{y \in \mathbb{R};\ |y - y_0| \leq b\}.$$

Em $C^0(I_\alpha)$ (o espaço vetorial das funções contínuas em I_α com valores em $\mathbb{R}$) considera-se a métrica do supremo, isto é, se $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^0(I_\alpha)$ então

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup_{x\in I_\alpha} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|\,.$$

Por $\mathcal{C}(I_\alpha)$ será denotado o espaço métrico completo $\big(C^0(I_\alpha),\, d\big)$. Assumindo as condições precedentes mostra-se o seguinte teorema.

Teorema 4.3 *Se $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e Lipschtz na segunda variável então o Problema de Cauchy (4.1) tem uma única solução em $\mathcal{C}(I_\alpha)$.*

Demonstração - A aplicação $T : \mathcal{C}(I_\alpha) \to \mathcal{C}(I_\alpha)$ definida por

$$(T\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \ \text{ para todo } \ x \in I_\alpha \tag{4.2}$$

tem um único ponto fixo. De fato, inicialmente note que $(T\phi)(x_0) = y_0$. Além disso,

$$|(T\phi)(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t))|dt \leq M\alpha < b \text{ para todo } x \in I_\alpha.$$

Daí, tem-se pela definição de $\mathcal{R}$ que o gráfico $(\phi, T\phi)$ de T pertence a $\mathcal{R}$. Além disso, T é uma contração em $\mathcal{C}(I_\alpha)$, pois se f é Lipschitz então para $x \in I_\alpha$ que

$$\begin{aligned} |(T\phi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))|dt \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt \leq L\alpha\|\phi - \psi\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|T\phi - T\psi\| = \sup_{x \in I_\alpha} |(T\phi)(x) - (T\psi)(x)| \leq L\alpha\|\phi - \psi\|.$$

Ou seja, $d(T\phi, T\psi) \leq L\alpha\, d(\phi, \psi)$. Tomando $L\alpha < 1$ tem-se que T é uma contração. Daí e do Teorema 4.1 existe um único $\phi \in \mathcal{C}(I_\alpha)$ tal que $T\phi = \phi$. Ou seja, para $x \in I_\alpha$ o único ponto fixo ϕ satisfaz por $(*)$ a equação

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt.$$

Para eliminar a condição $L\alpha < 1$ prova-se que aplicação (4.2) satisfaz as condições do Teorema 4.2. Ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n é uma contração $\mathcal{C}(I_\alpha)$. Portanto, será mostrado que

$$d\,(T^n\phi, T^n\psi) \leq \kappa d\,(\phi, \psi) \quad \text{para todo } \phi,\ \psi \in \mathcal{C}(I_\alpha). \tag{4.3}$$

Com efeito, com o auxílio de (4.2) constrói-se para todo $x \in I_\alpha$ a seguinte sucessão:

$$\begin{aligned} &\phi = \phi_1(x); \\ &\phi_2(x) = (T\phi_1)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t))dt; \\ &\phi_3(x) = (T\phi_2)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_2(t))dt = (T^2\phi_1)(x); \\ &\qquad\vdots \\ &\phi_n(x) = (T\phi_{n-1})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))dt = (T^{n-1}\phi_1)(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sendo f Lipschitz tem-se

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |\phi_{n-1}(t) - \psi_{n-1}(t)|dt.$$

Repetindo o argumento, isto é

$$|\phi_{n-1}(t) - \psi_{n-1}(t)| \leq L \int_{x_0}^{t} |\phi_{n-2}(\xi) - \psi_{n-2}(\xi)|d\xi$$

obtém-se

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq L^2 \int_{x_0}^{x} \Big[\int_{x_0}^{t} |\phi_{n-2}(\xi) - \psi_{n-2}(\xi)| d\xi \Big] dt.$$

Seja

$$\theta_1(t) := \int_{x_0}^{t} |\phi_{n-2}(\xi) - \psi_{n-2}(\xi)| d\xi.$$

Então

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq L^2 \int_{x_0}^{x} \theta_1(t) dt.$$

Integrando por partes a integral acima (com $u = \theta_1(t)$ e $dv = dt$) resulta

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \theta_1(t) dt &= t\theta_1(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} t|\phi_{n-2}(t) - \psi_{n-2}(t)| dt \\ &= x\theta_1(x) - \int_{x_0}^{x} t|\phi_{n-2}(t) - \psi_{n-2}(t)| dt, \quad \text{pois} \quad \theta_1(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Daí e da definição de $\theta_1(x)$ obtém-se

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq L^2 \int_{x_0}^{x} (x-t)|\phi_{n-2}(t) - \psi_{n-2}(t)| dt.$$

Usando novamente, na integral, o fato de f ser Lipschitz obtém-se

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq L^3 \int_{x_0}^{x} (x-t) \Big[\int_{x_0}^{t} |\phi_{n-3}(\xi) - \psi_{n-3}(\xi)| d\xi \Big] dt.$$

Seja

$$\theta_2(t) = \int_{x_0}^{t} |\phi_{n-3}(\xi) - \psi_{n-3}(\xi)| d\xi.$$

Fazendo $u = \theta_2(t)$ e $dv = (x-t)dt$ resulta que $du = |\phi_{n-3}(t) - \psi_{n-3}(t)|$ e $v = -(x-t)^2/2$. Assim, com $\theta_2(x_0) = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} L^3 \int_{x_0}^{x} (x-t)\theta_2(t) dt &= L^3 \Big[\underbrace{-\frac{(x-t)^2}{2} \theta_2(t)\Big|_{x_0}^{x}}_{=0} \\ &+ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2} |\phi_{n-3}(t) - \psi_{n-3}(t)| dt \Big] \\ &= \frac{L^3}{2!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^2 |\phi_{n-3}(t) - \psi_{n-3}(t)| dt. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{L^3}{2!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^2 |\phi_{n-3}(t) - \psi_{n-3}(t)| dt.$$

De modo análogo verifica-se que

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{L^4}{3!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^3 |\phi_{n-4}(t) - \psi_{n-4}(t)| dt.$$

De um modo geral mostra-se pelo Princípio de Indução Matemática que

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{L^{n-1}}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} |\phi_1(t) - \psi_1(t)| dt.$$

Tomando o supremo em $x \in I_\alpha$ tem-se

$$\begin{aligned} \|\phi_n - \psi_n\| &\leq \frac{L^{n-1}}{(n-2)!} \|\phi_1 - \psi_1\| \left| \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} dt \right| \\ &= \frac{L^{n-1}}{(n-2)!(n-1)} \|\phi_1 - \psi_1\| \, |x - x_0|^{n-1} \\ &\leq \frac{(L\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \|\phi_1 - \psi_1\|. \end{aligned}$$

Daí, obtém-se

$$d(\phi_n, \psi_n) \leq \frac{(L\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} d(\phi_1, \psi_1).$$

Daí e de (4.3) tem-se que $\phi = \phi_1$ e $\phi_n = T^{n-1}\phi$. Portanto,

$$d\left(T^{n-1}\phi, T^{n-1}\psi\right) \leq \frac{(L\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} d(\phi, \psi).$$

Observe que $a_n = \dfrac{(L\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$ é o termo geral da série convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{(L\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} < 1 \text{ para } n \geq \mathbb{N}.$$

Logo, (4.3) está provado. Assim, existe uma potência T^n de T, a qual é uma contração em $\mathcal{C}(I_\alpha)$. Portanto, o Teorema 4.2 garante que a aplicação T definida em (4.2) possui um único ponto fixo $T\phi = \phi$, o qual é solução em I_α da equação

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y) dt \quad \blacksquare$$

Aplicação II Estuda-se agora o Problema de Cauchy (4.1) supondo a função f definida em um aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Como dito acima, aqui também, será feito uso do Teorema do Ponto Fixo de Banach 4.1. Inicia-se introduzindo alguns conceitos de análise.

Definição 4.6 *Dados* $x_0 \in X$ *e* $r \in \mathbb{R}$, *com* $r > 0$, *uma* **bola aberta** *e uma* **bola fechada** *em* X *são os conjuntos*

$$B(x_0, r) = \{x \in X;\ d(x, x_0) < r\} \quad \text{e} \quad \overline{B}(x_0, r) = \{x \in X;\ d(x, x_0) \leq r\}$$

respectivamente. O número r *é chamado de raio e* x_0 *de centro das bolas.*

Para $\epsilon > 0$ *uma* **vizinhança**, *as vezes denotada por* V *ou por* V_ϵ, *é uma bola aberta* $B(x_0, \epsilon)$.

Definição 4.7 *Um ponto* x_0 *é dito* **ponto interior** *do conjunto* $A \subset X$ *se* A *é uma vizinhança de* x_0*. O interior de* A *é o conjunto de todos os pontos interiores de* A*.*

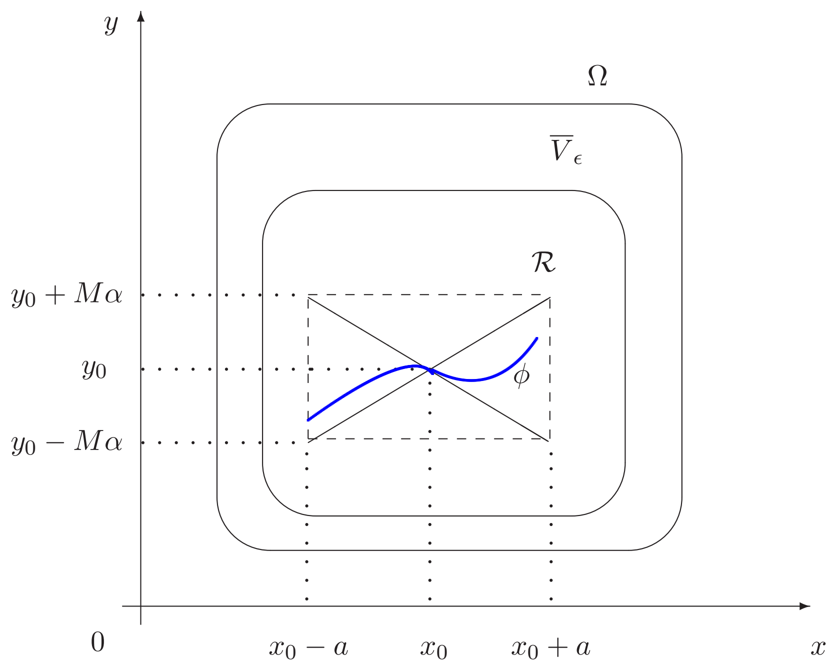
Exemplo 4.5 (a) *Todos os pontos de uma bola aberta são pontos interiores dessa bola;*

(b) *O conjunto dos pontos interiores dos inteiros* $\mathbb{Z}$ *é vazio.*

Definição 4.8 *Uma função* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é dita* **localmente Lipschitz** *se existe uma vizinhança de um ponto qualquer de* Ω *na qual* f *é Lipschitz*

Teorema 4.4 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *uma região aberta e limitada com ponto interior* (x_0, y_0) *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e localmente Lipschitz. Então o Problema de Cauchy (4.1) tem uma única solução.*

Demonstração - Para uma melhor compreenção acompanhe a demonstração pela figura a seguir



Inicialmente, note que a solução do PC (4.1) deve passar pelo ponto (x_0, y_0). Sendo $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f \in C^0(\Omega)$ e localmente Lipschitz então para $\epsilon > 0$ pequeno e fixo existe uma vizinhança fechada

$$\overline{V}_\epsilon = \{(x, y) \in \Omega;\ d\big((x, y), (x_0, y_0)\big) \leq \epsilon\}$$

de (x_0, y_0) contida em Ω na qual f é limitada e Lipschitz. Considere os números finitos

$$M = \sup_{\overline{V}_\epsilon} |f(x,y)| \quad \text{e} \quad L = \sup_{\overline{V}_\epsilon} \left| \frac{f(x,y_2) - f(x,y_1)}{y_2 - y_1} \right| \quad \text{com} \quad y_1 \neq y_2.$$

Seja $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq M\alpha\}$ um retângulo fechado e limitado contido em $\overline{V}_\epsilon$. Note que $\mathcal{R}$ têm as retas $y - y_0 = \pm M(x - x_0)$ como diagonais. O intervalo I_a é a projeção de $\mathcal{R}$ sobre a reta horizontal $y = 0$. Ou seja,

$$I_a = \text{proj}_x \mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| \leq a\}.$$

A metade da amplitude de I_a é denotada por α, isto é, $\alpha = |I_a|/2$. Observe que $I_\alpha \subset I_a$. A projeção de $\mathcal{R}$ sobre a reta vertical $x = 0$ é o intervalo

$$[y_0 - M\alpha, y_0 + M\alpha] = \text{proj}_y \mathcal{R} = \{y \in \mathbb{R};\ \ |y - y_0| \leq M\alpha\}.$$

Considere o subespaço $\mathcal{C}^*(I_\alpha)$ do espaço métrico completo $\mathcal{C}(I_\alpha)$ constituido pelas funções $\phi : I_\alpha \to \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(x_0) = y_0; \tag{i}$$

$$y_0 - M\alpha \leq \phi(x) \leq y_0 + M\alpha \ \text{ para todo } \ x \in I_\alpha. \tag{ii}$$

O espaço $\mathcal{C}^*(I_\alpha)$ é fechado e portanto completo. Finalmente considere a aplicação $T : \mathcal{C}^*(I_\alpha) \to \mathcal{C}^*(I_\alpha)$ definida por

$$(T\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \ \text{ para todo } \ x \in I_\alpha.$$

Daí tem-se que $(T\phi)(x_0) = y_0$ e

$$|(T\phi)(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi(t))|dt \leq M|x - x_0| \leq M\alpha.$$

Ou seja, o gráfico $(x, (T\phi)(x))$ de T pertence a $\mathcal{R}$. Além disso, T é uma contração. De fato, a demonstração é similar a do Teorema 4.3, isto é, se ϕ, ψ são duas funções quaisquer em $\mathcal{C}^*(I_\alpha)$ então

$$|(T\phi)(x) - (T\psi)(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |\phi(t) - \psi(t)|dt \leq L\alpha \|\phi - \psi\|.$$

Daí obtém-se $\|T\phi - T\psi\| \leq L\alpha\|\phi - \psi\|$. Tomando α tal que $L\alpha < 1$ encontra-se um intervalo com centro em x_0 no qual está definida a solução do Problema de Cauchy (4.1).

A hipótese $L\alpha < 1$ pode ser eliminada provando a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n seja uma contração. Para isto, basta repetir parte da demonstração do Teorema 4.3. Assim, segue que T é uma contração sem a restrição $L\alpha < 1$ ■

Exercício da Lição 4

Exercício 4.1 *A classe das funções localmente Lipschiz contém a classe das Lipschiz. Para constatar esta afirmação cita-se a classe das funções polinomiais do* $\mathbb{R}^2$. *Essas funções não são Lipschiz em todo* $\mathbb{R}^2$, *todavia em uma região limitado do plano elas são Lipschiz. Portanto, localmente Lipschiz. Para exemplificar, considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = x^2y^3$. *Mostre que* f *não Lipschitz em* $\mathbb{R}^2$. *Porém, na bola* $B((0,0), 1)$ *ela a é. Para isto use o Proposição 2.1 e conclua que a constante de Lipschitz é* $L = 3$ *em* $B((0,0), 1)$.

Exercício 4.2 *Seja* X *um espaço métrico. Mostre que:*

(a) *Uma sequência convergente em* X *é limitada e seu limite é único;*

(b) *Se* $x_n \to x$ *e* $y_n \to y$ *quando* $n \to \infty$ *então* $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Exercício 4.3 *A demonstração do Teorema 4.4 pode ser feita utilizando os argumentos empregados na demonstração do Teorema 2.3. Faça de modo adequado os detalhes desta afirmação.*

Exercício 4.4 *Mostre que o espaço métrico das funções contínuas* $C^0([0, 1])$ *com a métrica definida por*

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$

não é completo.

Sug.: .....

Exercício 4.5 $\cdots$

Exercício 4.6 $\cdots$

Lição 5 – Método da Poligonal

Objetiva-se mostra que o roblema de Cauchy

$$y'(x) = f(x, y(x)), \;\; y(x_0) = y_0 \tag{5.1}$$

tem solução supondo f apenas **contínua**. Este resultado é devido a Cauchy e Peano. Sendo f apenas contínua não se conhece resultado de unicidade de soluções para o PC (5.1).

Teorema de Arzelà-Áscoli

A existência de soluções supondo f contínua será mostrada por meio do Teorema de Arzelà-Áscoli. Como na Lição 4 denota-se por $\mathcal{C}(I)$ o espaço métrico $(C^0(I), d)$, onde $C^0(I)$ é conjunto das funções reais contínuas definidas no intervalo $I = [a, b]$ e d é a métrica

$$d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\| = \sup_{x \in I} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Definição 5.1 *Um subconjunto A de $\mathcal{C}(I)$ é uniformemente limitado quando existe uma constante κ tal que $\|\varphi\| = \sup_{x \in I} |\varphi(x)| \le \kappa$ para toda $\varphi \in A$.*

Lema 5.1 *Seja $A \subset \mathcal{C}(I)$ uniformemente limitado. Então para todo subconjunto enumerável E de I existe uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contida em A convergente em todos os pontos de E. Em outras palavras,*

(i) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uniformemente limitada;*

(ii) $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência numérica convergente* $\forall x \in E \subset I$.

Demonstração - Seja $x_1, x_2, \ldots,$ elementos de E. Na verdade x_i, para cada $i = 1, 2, \ldots,$ pode ser considerado como um racional de I. O conjunto numérico

$$\{\varphi(x_i) \in \mathbb{R};\ \varphi \in A \text{ e } \varphi : E \to \mathbb{R}\}$$

é limitado por hipótese. Portanto, aplicando o Teorema de Bolzano-Weierstrass ([6]) pode-se extrair deste conjunto uma sequência convergente $(\varphi_{n1}(x_1))$ para $n \in \mathbb{N}$. Note que $(\varphi_{n1}) \subset A$. Portanto limitada. Agora, considere a sequência numérica $(\varphi_{n1}(x_2))$. Então pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsucessão convergente $(\varphi_{n2}(x_2))$ de $(\varphi_{n1}(x_2))$, sendo (φ_{n2}) limitada, pois $(\varphi_{n2}) \subset A$.

[6] Toda sequência $(\alpha_\kappa)_{\kappa\in\mathbb{N}}$ limitada contém uma subsequência $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergente.

Repete-se este argumento, agora, nos pontos $x_3, x_4, \ldots\cdot$ Assim, obtém-se uma sucessão de subsucessões decrescente, isto é

$$(\varphi_{n1}) \supseteq (\varphi_{n2}) \supseteq \ldots \supseteq (\varphi_{nk}) \supseteq \ldots,$$

sendo (φ_{nk}) convergente para $k = 1, 2, \ldots\cdot$ Ou seja, tem-se as sucessões

$$\begin{array}{cccccl}
\varphi_{11}, & \varphi_{21}, & \ldots, & \varphi_{n1}, & \ldots & \text{(definidas em } x_1) \\
\varphi_{12}, & \varphi_{22}, & \ldots, & \varphi_{n2}, & \ldots & \text{(definidas em } x_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\varphi_{1n}, & \varphi_{2n}, & \ldots, & \varphi_{nn}, & \ldots & \text{(definidas em } x_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

A sequência diagonal

$$(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{definida por} \quad \psi_n = \varphi_{nn} \tag{$\star$}$$

é convergente, pois $(\varphi_{nk}(x_k))$ é uma subsequência de uma sequência convergente para cada k. Além disso, ψ_n está definida em todos os pontos $x_k \in E$. Logo, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão desejada ■

Definição 5.2 (Equicontinuidade) *Um conjunto* $A \subset \mathcal{C}^0(I)$ *é equicontínuo (ou uma família de funções é equicontínua) quando para cada* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que, para todo* $x, y \in I$ *e para toda* $\varphi \in A$ *se* $|x - y| < \delta$ *então* $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$.

Exemplo 5.1 *Cita-se duas classes importantes de funções equicontínuas:*

(i) *O conjunto* A *das funções Lipschitz em* I *é equicontínuo, pois dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \epsilon/L$ *para* $L > 0$ *tal que, para todo* $x, y \in I$ *se* $|x - y| < \delta$ *então* $|\varphi(x) - \varphi(y)| < L|x - y| < L\delta = \epsilon$ *para todo* $\varphi \in A$.

(ii) *A família das funções uniformemente convergentes é equicontínuo. Veja o Exercício 5.1.*

Teorema 5.1 (Teorema de Arzelà-Áscoli) *Seja* $A \subset \mathcal{C}^0(I)$ *um subconjunto infinito satisfazendo as hipótesis:*

(i) A *é uniformemente limitado,*

(ii) A *é equicontínuo.*

Então toda sequência de A *possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Note que o Teorema de Arzelà-Áscoli "seria" uma adaptação (uma versão) do Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessão de funções.

Demonstração - A demonstração será feita em três etapas, a saber:

Etapa 1: A **contém uma sequência** $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **convergente em** I. De fato, pelo Lema 5.1, para cada $k = 1, 2, \ldots,$ se r_k é um racional de $I = [a, b]$ então A contém uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida em $(\star)$, convergente em todo r_k de I.

Seja $t \in I$ um **irracional** qualquer. Pela densidade dos irracionais em I e equicontinuidade das funções de A então para cada $\epsilon > 0$ existe um racional $\mathrm{r} \in I$ tal que $|\varphi(t)-\varphi(\mathrm{r})| < \epsilon/3$ para todo $\varphi \in A$. Em particular, vale para os elementos da sucessão $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida em $(\star)$. Ou seja,

$$|\psi_n(t) - \psi_n(\mathrm{r})| < \epsilon/3 \ \text{ para todo } \ \psi_n \in A. \tag{a}$$

Sendo $(\psi_n(\mathrm{r}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente então para cada $\epsilon > 0$ dado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\psi_n(\mathrm{r}) - \psi_m(\mathrm{r})| < \epsilon/3 \ \text{ para todo } \ m,\, n \geq N. \tag{b}$$

Pela desigualdade triangular tem-se

$$|\psi_n(t) - \psi_m(t)| \leq |\psi_n(t) - \psi_n(\mathrm{r})| + |\psi_n(\mathrm{r}) - \psi_m(\mathrm{r})| + |\psi_m(\mathrm{r}) - \psi_m(t)|.$$

Usando nesta desigualdade (a) e (b) tem-se para cada $\epsilon > 0$ dado a existência de um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\psi_n(t) - \psi_m(t)| \leq \epsilon$ para $m, n \geq N$. Portanto, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy nos irracionais de I. Logo, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em todos os pontos de I.

Etapa 2: A função $\psi : I \to \mathbb{R}$ **definida por** $\psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ **é contínua no intervalo** I. De fato, pela equicontinuidade de A para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in I$ se

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{então} \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad \varphi \in A.$$

Sendo $(\psi_n) \subset A$ então $|\psi_n(x_1)-\psi_n(x_2)| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite, $n \to \infty$, resulta pela definição de ψ que

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \epsilon \ \text{ desde que } \ |x_1 - x_2| < \delta \ \text{ para todo } \ x_1,\, x_2 \in I.$$

Ou seja, ψ é de fato contínua em I. Daí, também tem-se que ψ é uniformemente limitada. Logo, ψ é equicontínua em I.

Etapa 3: A sucessão $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente para a função** $\psi : I \to \mathbb{R}$. Note que a sequência $(\psi_n - \psi)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua. Então para cada $\epsilon > 0$ dado existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in I$ se $|x_1 - x_2| < \delta$ então

$$|(\psi_n - \psi)(x_1) - (\psi_n - \psi)(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{c}$$

Para este δ considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)/n_0 < \delta$. Assim, constrói-se a seguinte decomposição de $I = [a, b]$:

$$D : \xi_0 := a < \xi_1 := a + 1\frac{b-a}{n_0} < \cdots < \xi_p := a + p\frac{b-a}{n_0} < \cdots < \xi_{n_0} := b.$$

Note que se $\xi_j \in D$ então $\psi(\xi_j) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\xi_j)$. Logo, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\psi_n(\xi_j) - \psi(\xi_j)| < \epsilon/2 \text{ para todo } n \geq N_j. \tag{d}$$

Mostra-se, agora, que (d) é válida para todo $x \in I$. De fato, se $x \in I$ então existe $j \in \{0, 1, \ldots, n_0\}$ tal que

$$|x_j - x| < \frac{b-a}{n_0} < \delta.$$

Considere $N = \max\{N_0, N_1, \ldots, N_{n_0}\}$. Assim, pela desigualdade triangular, (c) e (d) obtém-se

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - \psi(x)| &\leq \Big|(\psi_n(x) - \psi(x)) - (\psi_n(\xi_j) - \psi(\xi_j))\Big| + |(\psi_n(\xi_j) - \psi(\xi_j))| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ para todo } x \in I \text{ e para todo } n > N. \end{aligned}$$

Logo $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em I ■

Teorema de Cauchy-Peano

Teorema 5.2 (Teorema de Cauchy-Peano) *Seja Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^2$ com $(x_0, y_0) \in \Omega$. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então existe pelo menos uma função contínua $\phi : I \to \mathbb{R}$ solução do PC (5.1).*

Observe, a seguir, que o Teorema de Cauchy-Peano foi de certa forma “inspirado” no Método das Aproximações Sucessivas, cf. Secção 1.2.2. Trata-se, portanto, de um método construtivo de **poligonais.**

Demonstração - A demonstração será feita em quatro etapas.

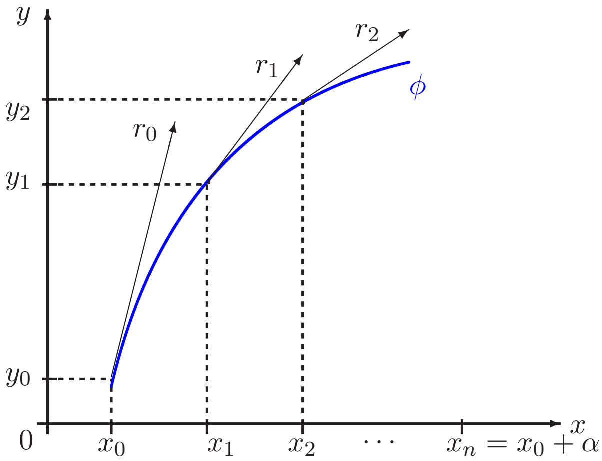
Etapa 1: Construção de uma sucessão de poligonais $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inicia-se denotando por V uma vizinhança fechada centrada em (x_0, y_0) de raio $\epsilon > 0$ contida em Ω. Ou seja,

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ d((x, y), (x_0, y_0)) \leq \epsilon\} \subset \Omega.$$

Seja $M = \sup_{(x,y)\in V} |f(x, y)|$ e

$$\mathcal{R}_0 = \{(x, y) \in V;\ |x - x_0| \leq \alpha,\ \ |y - y_0| \leq M\alpha\} \subset V \quad \text{com} \quad \alpha > 0.$$

O Teorema será demostrado para $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, pois de modo similar prova-se para $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$. Acompanhe pelo gráfico



as definições a seguir. Por D denota-se a decomposição de $[x_0, x_0+\alpha]$ dada por

$$D : x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_0 + \alpha.$$

Seja $f(x_i, \phi_i)$ (note que $f \in C^0(\Omega)$) a inclinação de uma solução $\phi = \phi(x)$ de $y' = f(x, y)$ no ponto $(x_i, \phi_i) \in \mathcal{R}_0$. Assim, a reta que passa por (x_0, y_0) tendo a inclinação de uma solução em $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}_0$ é dada por

$$r_0 : \phi - \phi_0 = f(x_0, \phi_0)(x - x_0) \text{ onde } \phi_0 = \phi(x_0) = y_0 \text{ e } x \in [x_0, x_1]. \qquad \text{(i)}$$

Considera-se $\phi = \phi(x)$ definida por (i) como uma solução aproximada em $[x_0, x_1]$ de $y' = f(x, y)$. Sendo $\phi_1 = \phi(x_1)$ obtém-se $(x_1, \phi_1) \in \mathcal{R}_0$ e a reta

$$r_1 : \phi - \phi_1 = f(x_1, \phi_1)(x - x_1) \text{ com } x \in [x_1, x_2]. \qquad \text{(ii)}$$

Seja $\phi = \phi(x)$ dado por (ii) uma solução aproximada de $y' = f(x, y)$ em $[x_1, x_2]$. Repetindo o processo acima em cada ponto de D obtém-se os pontos

$$(x_0, \phi_0),\ (x_1, \phi_1),\ \ldots,\ (x_i, \phi_i),\ \ldots,\ (x_n, \phi_n) \qquad \text{(iii)}$$

em $\mathcal{R}_0$ e as soluções aproximadas $\phi = \phi(x)$ dadas por

$$\phi - \phi_{i-1} = f(x_{i-1}, \phi_{i-1})(x - x_{i-1}) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{e} \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Daí, considera-se $P_i : [x_0, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ retas definidas

$$P_i(x) = \phi_{i-1} + f(x_{i-1}, \phi_{i-1})(x - x_{i-1}) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n,$$

e χ a função característica de $[x_{i-1}, x_i]$. Ou seja,

$$\chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{se} \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{se} \quad x \notin [x_{i-1}, x_i]. \end{array} \right.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ considera-se a função $\varphi_n : [x_0, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n(x) = \left(\chi_{[x_0, x_1)} P_1\right)(x) + \left(\chi_{[x_1, x_2)} P_2\right)(x) + \cdots + \left(\chi_{[x_{n-1}, x_n]} P_n\right)(x).$$

Note que a função φ_n tem como vértices os pontos fixados em (iii). Por esta razão, diz-se que φ_n é uma **poligonal** de n lados. Portanto, pela definição de φ_n obtém-se uma sucessão de poligonais $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{R}_0$, a qual é derivável exceto em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, e nestes pontos têm-se as derivadas laterais. Além disso, $\varphi_n^{'}$ é contínua em $]x_0, x_0+\alpha[$ exceto em $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Sendo $\varphi_n^{'}$ contínua então ela é integrável e pela Fórmula de Newton-Leibniz obtém-se

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi_n^{'}(t)dt \ \text{ para todo } \ x \in [x_0, x_0+\alpha], \tag{iv}$$

onde por definição de φ_n tem-se que $\varphi_n(x_0) = P_1(x_0) = \phi_0(x_0) = y_0$.

Etapa 2: Convergência da sucessão de poligonais $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A suquência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Arzelà-Áscoli. De fato,

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |\varphi_n^{'}(t)|dt \leq M \int_{x_0}^{x} dt \leq M\alpha. \tag{v}$$

Ou seja, $|\varphi_n(x)| \leq |y_0| + M\alpha$ para todo $x \in [x_0, x_0+\alpha]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

Além disso, para todo $x_1,\, x_2 \in [x_0, x_0+\alpha]$ se $|x_2 - x_1| < \delta$ então

$$|\varphi_n(x_2) - \varphi_n(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |\varphi_n^{'}(t)|dt \leq M|x_2 - x_1| < M\delta. \tag{vi}$$

Assim, para cada $\epsilon > 0$ escolhe-se $\delta = \epsilon/M$ tais que $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto equicontínuo. Portanto, sendo $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente limitada e equicontínua tem-se pelo Teorema de Arzelà-Áscoli que, existe uma subsequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ da sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente para uma função contínua $\varphi : [x_0, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$.

Etapa 3: Limitação do gráfico $(x, \varphi_\nu(x))$ de $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$: Note que a desigualdade (v) guarante que o gráfico $(x, \varphi_\nu(x))$ de φ_ν pertence a $\mathcal{R}_0$. Além disso, observa-se que as projeções do gráfico de φ_ν sobre os eixos x e y são α/ν e $M\alpha/\nu$, respectivamente. Portanto, quanto maior for ν menor serão estas projeções, pois dado $\sigma > 0$ considere $\mu = \max\left\{\frac{2\,\alpha}{\sigma},\ \frac{2\,M\alpha}{\sigma}\right\}$. Então, para $\nu \geq \mu$ obtém-se que

$$\frac{\alpha}{\nu} \leq \frac{\alpha}{\mu} \leq \frac{\alpha}{\frac{2\,\alpha}{\sigma}} = \frac{\sigma}{2} < \sigma \qquad \text{e} \qquad \frac{M\alpha}{\nu} \leq \frac{M\alpha}{\mu} < \sigma.$$

Assim, o gráfico de φ_ν possui projeções sobre os eixos x e y menores que σ quando $\nu \geq \mu$. Logo, o gráfico de φ_ν é um subconjunto de $\mathcal{R}_\sigma$.

Etapa 4: A função φ definida como limite de (φ_ν) é solução do PC (5.1). Seja para cada $\nu \in \mathbb{N}$ a função $\psi_\nu : [x_0, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_\nu(t))dt.$$

Mostra-se, a seguir, que (ψ_ν) converge uniformemente para φ em $[x_0, x_0+\alpha]$. Na verdade é suficiente provar que $(\psi_\nu - \varphi_\nu)$ converge uniformemente para zero em $[x_0, x_0+\alpha]$. Sendo φ_ν dada por (iv) obtém-se

$$\psi_\nu(x) - \varphi_\nu(x) = \int_{x_0}^{x} \big[f(t, \varphi_\nu(t)) - \varphi_\nu^{'}(t)\big]dt. \tag{vii}$$

Note que $\varphi_\nu^{'}(x)$ é o valor de $f(x, \varphi_\nu(x))$ no extremo esquerdo (menor extremo) dos intervalos da decomposição D. Logo, a função integrando de (vii) é a diferença de valores de $f(x, \varphi_\nu(x))$ em dois pontos. Como f é contínua no compacto $\mathcal{R}_0$ então ela é uniformemente contínua em $\mathcal{R}_0$. Portanto, para cada $\epsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que a oscilação de f é menor que ϵ nos sub-retângulos de $\mathcal{R}_0$ de diagonais menores do que σ. Ou seja,

$$|f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})| < \epsilon \text{ para todo } (x_{i-1}, y_{i-1}),\ (x_i, y_i) \in \mathcal{R}_i,$$

onde $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_i = \{(x,y) \in V;\ \ |x - x_i| \le \sigma,\ \ |y - y_i| < \sigma\}$ são retângulos com lados paralelos aos eixos dos x e y tendo como diagonais o gráfico de φ_ν. Para este $\sigma > 0$ considera-se $\nu > \mu$ tal que φ_ν seja coberta por tais retângulos. Pela Etapa 3 tais retângulos possuem diagonais menores do que σ. Portanto, para os pontos destes retângulos tem-se pela continuidade uniforme de f que

$$\Big|f(t, \varphi_\nu(t)) - \varphi'_\nu(t)\Big| < \epsilon \text{ para } \nu > \mu = \mu(\sigma) \text{ e } \sigma = \sigma(\epsilon). \tag{viii}$$

De (vii) e (viii) segue que

$$\Big|\psi_\nu(x) - \varphi_\nu(x)\Big| < \epsilon|x - x_0| < \epsilon\alpha \text{ para todo } x \in [x_0, x_0+\alpha] \text{ e } \nu > \mu.$$

Logo, $\psi_\nu \to \varphi$ em $[x_0, x_0+\alpha]$ quando $\nu > \mu$.

Resta mostrar que

$$\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_\nu(t))dt \to \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

converge uniformemente em $[x_0, x_0+\alpha]$. Nas condições fixadas para σ e ϵ tem-se

$$|\varphi_\nu(t) - \varphi(t)| < \sigma \quad \text{em} \quad [x_0, x_0+\alpha] \quad \text{quando} \quad \nu > \mu,$$

pois $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente. Como os pontos $(x, \varphi_\nu(x))$ e $(x, \varphi(x))$ pertencem ao retângulo $\mathcal{R}_\sigma$ e f é em $\mathcal{R}_\sigma$ uniformemement contínua então

$$|f(t, \varphi_\nu(t)) - f(t, \varphi(t))| < \epsilon \quad \text{quando} \quad \nu > \mu.$$

Assim, para cada $\epsilon > 0$ dado e para todo $x \in [x_0, x_0+\alpha]$ tem-se

$$\Big|\int_{x_0}^{x} \big[f(t, \varphi_\nu(t)) - f(t, \varphi(t))\big]dt\Big| \le \epsilon|x - x_0| < \epsilon\alpha.$$

Portanto, quando $\nu \to \infty$ obtém-se a convergência

$$\psi_\nu(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_\nu(t))dt \to y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt = \varphi(x).$$

Logo φ é solução do PC (5.1) ■

Exercícios da Lição 5

Exercício 5.1 *Mostre que o conjunto das funções uniformemente convergente é equicontínuo.*

Sug.: ...

Exercício 5.2 *Mostre que ...*

Exercício 5.3 *Mostre que ...*

Lição 6 – Soluções Analíticas

Objetiva-se estudar a existência e unicidade de soluções analíticas para o problema de Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{6.1}$$

O método para obter as soluções analíticas é devido a Cauchy e denomidado, por ele, **Método dos Limites.** Também conhecido como **Método das Funções Majorantes.**

Inicialmente relembra-se alguns conceitos do *Cálculo Diferencial.*

Um intervalo aberto

$$I = \{x \in \mathbb{R}; \ \ |x - x_0| < a, \ \ a > 0\} = (a - x_0, a + x_0) =: V_a(x_0)$$

é também chamado de uma vizinhança aberta de $x_0 \in \mathbb{R}$.

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ pertence à classe $C^\infty(I)$ se, e somente se, ela é infinitamente derivável e as derivadas de todas as ordem são contínuas em I.

A série de Taylor de f em x_0 é dada por

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i \quad \text{onde} \quad a_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i f(x_0)}{dx} = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0). \tag{$*$}$$

Ocorre uma das três possibilidades para a série de potências $(*)$:

• Converge em todo $x \in I$;

• Converge somente em $x = x_0$;

• Existe $r > 0$ tal que $(\star)$ converge em $|x - x_0| < r$ e diverge em $|x - x_0| > r$.

Quando a série $(*)$ converge a função soma $s(x)$ é uma função infinitamente derivável. Uma questão é saber se $s(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Isto nem sempre ocorre. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left| \begin{array}{lll} e^{-1/x^2} & \text{se} & x \neq 0, \\ 0 & \text{se} & x = 0, \end{array} \right.$$

é contínua em $\mathbb{R}$, pois em $x = 0$ tem-se que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ e assim, f é contínua em 0. Além disso, tem-se que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(i)}(0) = 0$. Logo, a série de Taylor na vizinhança de $x_0 = 0$ é identicamente nula, enquanto f não é uma função nula nesta vizinhança.

O leitor poderá constatar, em livros de análise, que há funções reais infinitamente deriváveis cujas as séries de Taylor em um ponto x_0, divergem.

Definição 6.1 (Função Analítica) *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é analítica em x_0 se, e somente se, f é igual à sua série de Taylor na vizinhança I de x_0.*

Considera-se o PC (6.1) em um aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^2$ com $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função analítica em uma vizinhança V de (x_0, y_0). Sendo f analítica em (x_0, y_0) tem-se, por definição, que se $(x, y) \in V$ então

$$f(x,y) = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} a_{i\,j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \quad \text{onde} \quad a_{i\,j} = \frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^{i+j} f(x_0,y_0)}{\partial x^i\,\partial y^j}.$$

Definição 6.2 (Solução Analítica) *O problema (6.1) tem uma solução analítica em* I *se, e somente se, existe uma função analítica* $\phi = \phi(x)$ *definida em* I *satisfazendo* $(x, \phi(x)) \in \Omega$ *para todo* $x \in I$ *e* $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$, $\phi(x_0) = y_0$ *para todo* $x \in I$.

Teorema 6.1 (Teorema de Cauchy) *Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função analítica em uma vizinhança de* (x_0, y_0) *então o problema (6.1) possui uma única solução em* $I_\rho = \{x \in \mathbb{R};\ |x| < \rho\}$ *onde* ρ *é uma constante definida em (9).*

Demonstração - A demonstração será feita em cinco etapas.

Etapa 1: Construção da solução $\phi = \phi(x)$. Para facilitar a notação o dado inicial do PC (6.1) será considerado nulo, isto é, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Ou seja,

$$y' = f(x,y), \qquad y(0) = 0. \tag{1}$$

Assim, a série de potências $(*)$ de f na vizinhança $(0, 0)$ é dada por

$$f(x,y) = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} a_{i\,j}x^i y^j \quad \text{onde} \quad a_{i\,j} = \frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\,\partial y^j}f(0,0). \tag{2}$$

Sendo f dada por (2) é natural que a solução procurada $\phi = \phi(x)$ de (1) deva ser uma função analítica. Portanto, supõe-se que $\phi :$ seja dada por

$$\phi(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_\kappa x^\kappa \quad \text{para todo} \quad x \in I_a \quad \text{com} \quad b_\kappa = \frac{1}{\kappa!}\frac{d^\kappa}{dx^\kappa}\phi(0), \tag{3}$$

onde $I_a = \{x \in \mathbb{R};\ |x| < a,\ \ a > 0\}$. Os coeficientes b_κ são calculados por meio do PC (1) em função dos coeficientes b_κ e de suas derivadas sucessívas no ponto $x = 0$ como a seguir. Sendo ϕ uma solução de (1) tem-se que $\phi'(0) = f(0, 0)$ e por definição de b_κ obtém-se ([7])

$$\begin{aligned}
&b_0 = \phi(0);\\
&b_1 = \phi'(0) = f(0,0);\\
&2!b_2 = \phi''(0) = f_x(0,0) + f_y(0,0)\phi'(0) = f_x(0,0) + f_y(0,0)b_1;\\
&3!b_3 = \phi'''(0) = f_{xx}(0,0) + 2f_{xy}(0,0)b_1 + f_{yy}(0,0)b_1^2 + 2f_y(0,0)b_2;\\
&\quad\vdots
\end{aligned} \tag{4}$$

[7] $\dfrac{d}{dx}f(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$.

As questões naturais que surgem são:

(a) A série (3) com os coeficientes determinados indutivamente por (4) é convergente?

(b) A série (3) é solução de (1)?

Note que, se **(a)** é verdadeiro então prova-se **(b)**, pois substituindo a função analítica $\phi = \phi(x)$ dada por (3) em (1) obtém-se a função $\varphi : I_a \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \phi'(x) - f(x, \phi(x))$, a qual é nula em I_a. Além disso, todas as suas derivadas são também nulas em I_a. Portanto, φ é a função analítica, nula e definida no mesmo intervalo de convergência da série (3). Além disso, por definição o gráfico $(x, \varphi(x))$ de φ pertence a uma vizinhança de $(0, 0)$ contida em Ω. Logo, tem-se que ϕ é uma solução de (1) no sentido da Definição 7.2. Isto responde (prova) a questão **(b)**.

Etapa 2: Método das Funções Majorantes. A meta aqui é estabelecer a convergência da série (3) e assim responder a questão **(a)**. Portanto, considera-se o retângulo aberto centrado na origem $\mathcal{R}_0 = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < a,\ \ |u| < b\}$ e $F : \mathcal{R}_0 \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Precisamente, suponha $(x, u) \in \mathcal{R}_0$ e

$$F(x, u) = \sum_{i,\, j=0}^{\infty} A_{i\,j} x^i u^j \quad \text{com} \quad |a_{i\,j}| \leq A_{i\,j} = \frac{1}{i!\, j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\, \partial y^j} F(0, 0), \tag{5}$$

com $i,\ j = 1,\ 2, \ldots \cdot$ Para a função F considera-se o seguinte PC

$$u' = F(x, u), \qquad u(0) = 0. \tag{6}$$

O objetivo, agora, é encontrar uma solução analítica para o *problema Majorante* (6). Por um momento, suponha que o PC (6) tenha uma solução analítica ψ dada por

$$\psi(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} c_\kappa x^\kappa \quad \text{para todo} \quad x \in I_a \quad \text{com} \quad c_\kappa = \frac{1}{\kappa!} \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} \psi(0). \tag{7}$$

De modo análogo ao desenvolvido para obter os coeficientes b_κ em (4), calcula-se c_κ em função dos coeficientes $A_{i\,j}$. Assim, de (5) resulta que (7) é uma função majorante de (3), pois os coeficientes b_κ e c_κ são polinômios obtidos de $a_{i\,j}$ e $A_{i\,j}$, respectivamente. Ou seja, $b_\kappa = p\,(a_{i\,j})$ e $c_\kappa = P\,(A_{i\,j})$. Portanto, de (5) resulta

$$|b_\kappa| = |p\,(a_{i\,j})| \leq |P\,(A_{i\,j})| = c_\kappa \quad \text{para todo} \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Logo, esta desigualdade assegura que, se (6) possui uma solução analítica ψ dada por (7) em uma vizinhança do zero então ela é majorante da função ϕ dada em (3). Ou seja, a série (3) será convergente em uma vizinhança da origem se a série (7) for, também, convergente nesta vizinhça. Em outras palavras, as reduzidas s_n de ϕ são majoradas pelas reduzidas S_n de ψ. Era o que se desejava. Resta, porém, mostrar que ψ existe e é analítica.

Etapa 3: Escolha da função F. O sucesso do método consiste na escolha conveniente da função majorante $F(x,u)$ da função $f(x,y)$ de modo a obter-se um problema de simples resolução. Com efeito, suponha f analítica no retângulo $\mathcal{R}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| < a,\ \ |y| < b\}$. Assim, a série numérica

$$\sum_{i,\,j=0}^{\infty} a_{i\,j} a^i b^j \quad \text{converge para} \quad f(a,b).$$

Daí, a sucessão $(a_{i\,j}a^i b^j)$ é convergente. Logo, existe $M \geq 0$ tal que $\left|a_{i\,j}a^i b^j\right| \leq M$. O que equivale a $|a_{i\,j}| \leq \dfrac{M}{a^i b^j}$ para $i,\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ Portanto,

$$f(x,y) = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} a_{i\,j} x^i y^j \leq M \sum_{i,\,j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{y}{b}\right)^j.$$

A série majorante acima é uma série geométrica dupla cuja soma é dada por

$$F(x,y) = \frac{M}{(1-x/a)(1-y/b)}.$$

Nestas condições, tem-se que $F(x,y)$ é majorante de $f(x,y)$ em $\mathcal{R}_0$. Resta mostrar que o PC (6) tem uma solução analítica para esta função F.

Etapa 4: Existência de soluções analíticas de (6). Com a escolha acima para F o PC (6) é dado para todo $(x,u) \in \mathcal{R}_0 \subset \Omega$ por

$$\frac{du}{dx} = \frac{M}{(1-x/a)(1-u/b)}, \quad u(0) = 0.$$

Separando as variáveis resulta que $(1-u/b)du = M\,dx/(1-x/a)$. Integrando de 0 a x, observando que $u(0) = 0$ e $\ln 1 = 0$ obtém-se

$$u(x) - \frac{u^2(x)}{2b} = -aM\,\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \ \text{ para todo } \ x \in I_a.$$

Assim, tem-se um polinômio de segundo grau em u dado por

$$u^2 - 2bu - 2abM\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0,$$

e uma solução é, para todo $x \in I_\rho = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x| < \rho < a\}$ dada por

$$u(x) = b - b\left[1 + 2a\frac{M}{b}\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right]^{1/2}, \tag{8}$$

onde ρ é a constante definida em (9). Mostra-se agora que u é analítica em I_ρ. Primeiro note que, se $x \in I_\rho$ então o logarítmo do radicando está bem definido, pois $1 - x/a > 0$. Assim, a sulução u se anula nos pontos

$$0 \quad \text{e} \quad \rho = a\Big(1 - e^{-b/2aM}\Big). \tag{9}$$

Por outro lado, sendo $|x| < \rho < a$ então a série

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n}\frac{x^n}{n} = \ln\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)$$

converge uniformemente e absolutamente. ([8]) Portanto, para mostrar que o radicando em (8) é positivo, basta mostrar que

$$2a\frac{M}{b}\ln\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)$$

é menor que 1. Isto é fato, pois

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{2aM}{b}\ln\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)\Big| \quad &\leq \quad \frac{2aM}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\frac{|x|^n}{n} \leq \frac{2aM}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\frac{\rho^n}{n} \\
&= \quad \frac{2aM}{b}\ln\Big(1 - \frac{\rho}{a}\Big) = 1 \qquad \text{(por (9))}.
\end{aligned}$$

Logo a função u dada por (8) e definida em I_ρ é analítica. Ou seja, possui uma série de potências convergente em I_ρ e esta majora a série (3).

Etapa 5: Unicidade de soluções de (1). Suponha ϕ, ψ duas soluções de (1) e seja $\varphi = \phi - \psi$. Então φ satisfaz

$$\varphi' = f(x,\phi) - f(x,\psi), \quad \varphi(0) = 0.$$

A solução (3) com os coeficientes (4) é a série com coeficientes nulos. Portanto, φ é a função nula definida em I_ρ. Logo, $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I_\rho$ $\blacksquare$

Exercícios da Lição 6

Exercício 6.1 *Mostre que a série*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{a}\Big)^i\Big(\frac{y}{b}\Big)^j = \frac{1}{(1 - x/a)(1 - y/b)}$$

em $\mathcal{R}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < a,\ |y| < b\}$.

Exercício 6.2 *Considere o problema*

$$y' = \frac{1}{(1 - x/a)(1 - y/b)}, \qquad y(0) = 0 \quad \text{com} \quad |x| < a, \quad |y| < b. \qquad \text{(a)}$$

(i) *Determine uma solução explicita para (a).*

[8] $\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ para $|x-1| < 1$. Integrando termo a termo, obtém-se $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)}$ para $0 < x < 2$.

(ii) *Mostre que esta solução é analítica em* $|x| < a$ *e que se anula em*

$$x = \rho = a\left(1 - e^{-b/2a}\right).$$

Conclua, portanto, que a sulução $y = y(x)$ *determinada no item* (i) *é analítica na bola* B_ρ *centrada na origem.*

(iii) *Mostre que a sulução é única em* I_ρ.

Exercício 6.3 ...

Exercício 6.4 ....

Exercício 6.5 .....

Lição 7 – Teoremas de Unicidade de Soluções

Serão mostrados quatro teoremas sobre unicidade de soluções em contextos mais gerais que os das licões 3, 4 e 6 para o problema

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0. \tag{7.1}$$

Se $f = f(x, y)$ não tem as regularidades admitidas nas lições 3, 4 e 6, isto é, f **apenas contínua** como no Teorema de Cauchy-Peano - 5.2, não se conhece nenhum resultado de unicidade de soluções para o PC (7.1).

Lema 7.1 (Lema de Hille) *Se* $g : [x_0, a] \to \mathbb{R}$ *com* $a > x_0$ *é uma função contínua satisfazendo*

$$g(x_0) = 0, \;\; g'(x_0) = 0 \quad e \quad 0 \leq g(x) \leq \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{t - x_0} dt \tag{a}$$

então $g(x) = 0$ *para todo* $x \in [x_0, a]$.

Demonstração - Considere a função $\varphi : [x_0, a] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{g(t)}{t - x_0} & \text{se} \quad t \neq x_0, \\ 0 & \text{se} \quad t = x_0. \end{array} \right.$$

Sendo $g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) = 0$ tem-se

$$\lim_{t \to x_0} \varphi(t) = \lim_{t \to x_0} \frac{g(t)}{t - x_0} = \lim_{t \to x_0} \frac{g(t) - g(x_0)}{t - x_0} = g'(x_0) = 0 = \varphi(x_0).$$

Assim, φ é contínua no intervalo $[x_0, a]$. Portanto, a função

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t) dt \;\text{ para todo }\; x \in [x_0, a] \tag{b}$$

está bem definida, é derivável em $[x_0, a]$, $F(x_0) = 0$ e $F'(x) = \varphi(x) = \dfrac{g(x)}{x - x_0}$ para $x \neq x_0$. De (a) e (b) tem-se $g(x) \leq F(x)$ em $[x_0, a]$. Daí, obtém-se

$$F'(x) = \frac{g(x)}{x - x_0} \leq \frac{F(x)}{x - x_0} \quad \text{em} \quad (x_0, a].$$

Portanto, para $x \in (x_0, a]$ tem-se

$$F'(x) - \frac{F(x)}{x - x_0} \leq 0 \Leftrightarrow (x - x_0)F'(x) - F(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - x_0)F'(x) - F(x)}{(x - x_0)^2} \leq 0.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left\{ \frac{F(x)}{x - x_0} \right\} \leq 0 \;\text{ para todo }\; x \in (x_0, a].$$

Isto implica que a função

$$\frac{F(x)}{x-x_0} \quad \text{não é crescente em} \quad (x_0, a]. \tag{c}$$

Mostra-se agora que $F(x) = 0$ em $(x_0, a]$. Primeiro note que, se $x \in (x_0, a]$ então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{x - x_0} = F'(x_0) = \varphi(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad F(x) \geq 0. \tag{d}$$

Agora, se $x \in (x_0, a]$ e $x > \epsilon > x_0$ então $0 < \epsilon - x_0 < x - x_0 \leq a$. De $(\mathrm{d})_2$ e (c) respectivamente, tem-se

$$0 \leq \frac{F(x)}{x - x_0} \leq \frac{F(\epsilon)}{\epsilon - x_0} \quad \text{para todo} \quad x \in (x_0, a].$$

De $(\mathrm{d})_1$ resulta que $\lim_{\epsilon \to x_0} \frac{F(\epsilon)}{\epsilon - x_0} = \varphi(x_0) = 0$. Portanto, $F(x) = 0$ para todo $x \in (x_0, a]$. Assim, $\varphi(x) = 0$ e isto implica $g(x) = 0$ em $[x_0, a]$ ∎

Teorema 7.1 (Teorema de Naguno) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para todo $x \in I = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < a\}$ se supõe que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{1}{|x - x_0|} |y_1 - y_2| \ \textit{para todo}\ (x, y_1),\ (x, y_2) \in \Omega. \tag{$*$}$$

Então o Problema de Cauchy (7.1) tem uma única solução em I.

Note que a região aberta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pode ser limitada ou pode ser uma faixa. Além disso, as hipóteses sobre a função f são menos restritivas do que as dos Teoremas 3.2, 4.3 e 6.1.

Demonstração - Como f é contínua em I então o teorema 5.2 de Cauchy-Peano garante que o PC (7.1) tem pelo menos uma solução. Sejam

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t)) dt \quad \text{e} \quad \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t)) dt$$

duas soluções em I do PC (7.1). Daí e da hipótese $(*)$ obtém-se

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{|t - x_0|} |\phi(t) - \psi(t)| dt \quad \text{em} \quad I.$$

Supondo $x > x_0$ e $g(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$ obtém-se

$$g(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq g(x) \leq \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{t - x_0} dt \ \text{ em } \ I.$$

Daí e do lema de Hille tem-se que $g(x) = 0$ em I. Logo, $\phi(x) = \psi(x)$ em I. A demonstração para $x < x_0$ é similar ∎

Definição 7.1 (Funções Admissíveis) *Uma função* $w : [x_0, a] \to \mathbb{R}$ *é admissível se, e somente se,* $w(x) > 0$ *para todo* $x \in]x_0, a]$, w *é estritamente crescente,* $w(x_0) = 0$ *e para* $\epsilon > x_0$ *o*

$$\lim_{\epsilon \to x_0} \int_\epsilon^a \frac{dx}{w(x)} = \stackrel{+}{-} \infty.$$

Exemplo 7.1 *A funções reais definidas em* $[0, a]$ *por* $w(x) = x^\kappa$ *para* $\kappa \geq 1$ *e com* $a > 0$ *são admissíveis. Note que* e^x *em* $[0, a]$ *com* $a > 0$ *não é admissível.*

Lema 7.2 *Sejam* $x_0 < a$ *e* $w : [x_0, a] \to \mathbb{R}$ *uma função admissível. Se* $g : [x_0, a] \to [x_0, a]$ *é uma função contínua e*

$$0 \leq g(x) \leq \int_{x_0}^x w(g(t))dt \quad \text{com} \quad x_0 \leq x \leq a$$

então $g(x) = 0$ *em* $[x_0, a]$.

Demonstração - A demonstração será feita por um argumento que leva a uma contradição. Assim, suponha que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in [x_0, a]$. Considera-se a função $h : [x_0, a] \to [x_0, a]$ definida por $h(x) = \sup\limits_{x_0 \leq t \leq x} g(t)$. Então, $g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [x_0, b]$ com $b < a$. Portanto, existe algum $x_1 \in [x_0, x]$ tal que $g(x_1) = h(x)$. Assim, sendo w positiva e crescente, obtém-se

$$g(x) \leq h(x) = g(x_1) \leq \int_{x_0}^{x_1} w(g(t))dt \leq \int_{x_0}^x w(g(t))dt \leq \int_{x_0}^x w(h(t))dt.$$

Usando novamente a monotocidade de w resulta

$$0 < w(h(x)) \leq w\Big(\int_{x_0}^x w(h(t))dt\Big).$$

Daí, se $\rho(\xi) = w(h(\xi))$ então $\rho(x) \leq w\Big(\int_{x_0}^x \rho(t)dt\Big)$. Ou seja

$$\frac{\rho(x)}{w\Big(\int_{x_0}^x \rho(t)dt\Big)} \leq 1.$$

Integrando de ϵ a a resulta

$$\int_\epsilon^a \frac{\rho(x)dx}{w\Big(\int_{x_0}^x \rho(t)dt\Big)} \leq a - \epsilon < a.$$

Daí, fazendo $v := v(x) = \int_{x_0}^x \rho(t)dt$ tem-se $\int_\epsilon^a \frac{dv}{w(v)} < a$. Isto contradiz o fato de w ser uma função admissível. Ou seja, a última integral deveria ser divergente quando $\epsilon \to x_0^+$. Logo, $g(x) = 0$ para todo $x \in [x_0, a]$ ■

Teorema 7.2 (Teorema de Osgood) *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le w(|y_1-y_2|) \quad \textit{para todo} \quad (x,y_1),\ (x,y_2)\in\Omega, \qquad (*)$$

onde w é uma função admissível e $x\in I=\{x\in\mathbb{R};\ |x-x_0|<a,\ a>0\}$, então o PC (7.1) tem uma única solução em I.

Demonstração - Novamente, como f é contínua em I então o teorema 5.2 de Cauchy-Peano garante que o PC (7.1) tem pelo menos uma solução. Sejam

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt \quad \text{e} \quad \psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt$$

duas soluções do PC (7.1) em I. Pela hipótese $(*)$ obtém-se

$$|\phi(x)-\psi(x)|\le\int_{x_0}^{x} w(|\phi(t)-\psi(t)|)dt \quad \text{para todo} \quad x\in I.$$

Fazendo $g(x)=|\phi(x)-\psi(x)|$ resulta

$$0\le g(x)\le\int_{x_0}^{x} w(g(t))dt \quad \text{para todo} \quad x\in I.$$

Portanto, pelo Lema 7.2 tem-se que $g(x)=0$ em I. Logo, $\phi(x)=\psi(x)$ em I ■

Os teoremas de Naguno e Osgood foram generalizados por L. A. Medeiros ([9]) para espaços de dimensões infinitas. Ou seja, foram provados no contexto dos espaços de Hilbert.

É oportuno observar que o teorema 5.2 de Cauchy-Peano garante a existência de soluções para o PC (7.1) apenas em espaços euclidiano. Ou seja, em espaços de dimensão finita como, por exemplo, no $\mathbb{R}^n$ onde o Teorema de Arzelà-Áscoli faz sentido. Portanto, o método de Cauchy-Peano não pode ser generalizado para espaços de dimensão infinita como foi provado em Dieudonné ([10]) e em Browder. ([11])

Espaços de Hilbert

A Teoria dos espaços com produto interno foi inicializada por D. Hilbert em 1912. Os espaços de Hilbert é a mais natural generalização dos espaços euclidiano.

Definição 7.2 (Produto Interno) *Seja E um espaço vetorial real não vazio. A função $<,>$: $E\times A\to\mathbb{R}$ definida por $(x,y)\mapsto<x,y>$ tal que, para todo x, $y\in E$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ satisfaz*

[9] *On nonlinear differential equations in Hilbert spaces*, American Mathmatical Monthly, Vol. 76, No. 9, November, 1960, pp. 1024-1027.

[10] *Deux exemples singuliers d'équations différentielles*, Acta. Sci. Math., 1950, pp. 38-40.

[11] *Nonlinear equations of evulution*, Ann. Math., 80, 1964, pp. 485-523.

(PI1) $x+y,z>=<x,y>+<y,z>$;

(PI2) $<\alpha x,y>=\alpha<x,y>$;

(PI3) $<x,y>=<y,x>$;

(PI4) $<x,x>\geq 0$ *e* $<x,x>=0$ *se, somente se,* $x=0$

é chamda de **produto interno sobre** E.

Um produto interno sobre E define uma norma sobre E dada por

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>} \quad \text{para todo} \quad x\in E \tag{7.2}$$

e uma métrica dada por

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{<x-y,x-y>} \quad \text{para todo} \quad x,\, y\in E. \tag{7.3}$$

Definição 7.3 (Espaço de Hilbert) *Um espaço de Hilbert H é todo espaço vetorial com produto interno completo com relação à métrica definida pelo produto interno, como em* (7.3).

Note que em espaços com produto interno pode-se definir uma norma como acima. Assim, espaços de Hilbert são espaços de Banach. Portanto, é comum dizer que um espaço de Hilbert é uma espaço normado com a norma proveniente de um produto interno.

Mostra-se que a norma de um espaço de Hilbert (norma definida por um produto interno) satisfaz a **identidade do paralelograma**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right). \tag{7.4}$$

Assim, se a norma não satisfaz (7.4) ela não pode ser obtida de um produto interno como em (7.2). Portanto, **nem todos os espaços normado são espaços com produto interno.**

Exemplo 7.2 *Exemplos de espaços de Hilbert e de espaços que não são Hilbert.*

(a) **Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$:** *com produto interno definido por*

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>=x_1y_1+\cdots+x_ny_n \ \ \textit{onde} \ \ \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n) \ \ \textit{e} \ \ \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$$

e a métrica dada por

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=<\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}>^{1/2}=\left[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{1/2}$$

é um espaço completo (Cf. Exercício (7.5) *(a)), portanto é um espaço de Hilbert.*

(b) *O espaço ℓ^2 das sequências de números complexos $\mathbf{x}=(x_1,\, x_2,\ldots)$ com o produto interno definido por*

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i \tag{$*$}$$

é um espaço métrico completo (Cf. Exercício (6.5) *(b)), e assim Hilbert. A convergência da série* ($\star$) *é uma consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz. A norma em* ℓ^2 *é dada por*

$$\|x\| =< \mathbf{x}, \mathbf{x} >^{1/2}= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

(c) *O espaço* ℓ^p *para* $p \neq 2$ *não é um espaço com produto interno, e assim não é Hilbert. Para constatar isto basta mostrar que a norma (veja Exemplo 4.1 (d)) não satisfaz a identidade do paralelogramo* (7.4)*. De fato, sejam* $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ *e* $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0, \dots) \in \ell^p$*. Então*

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p} \quad e \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2.$$

Por outro lado, ℓ^p *para* $p \geq 1$ *é completo (Cf. Exercício* (6.5) *(a)). Portanto,* ℓ^p *para* $p \neq 2$ *é um espaço de Banach que não é Hilbert.*

Os Teoremas de Unicidade de Medeiros

Como dito acima nesta secção mostra-se dois resultados, devida o L. A. Medeiros, ([12]) os quais têm os teoremas de Naguno e Osgood como casos particulares.

O problema (7.1) será considerado em um espaço de Hilbert H. Assim, considera-se a função vetorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times H \to H$ de modo que, para cada $(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^+ \times H$ os valores $\mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ de f são vetores de H. Assim, o PC (7.1) tem o que se chama de uma **formulação abstrata** dada por

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0. \tag{$\star$}$$

A existência de soluções do PC ($\star$) em espação de Hilbert real é garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 7.3 (Teorema de Browder) *Seja* H *um espaço de Hilbert e sopõe-se que a aplicação* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times H \to H$ *é fracamente contínua. Então para cada* $r > 0$ *existe* $\alpha(r) > x_0$ *tal que se* $\mathbf{u}_0 \in H$ *com* $\|\mathbf{u}_0\| < r$ *então existe uma função* $\boldsymbol{\phi} : [x_0, \alpha(r)] \to H$ *solução do PC* ($\star$)*.*

Demonstração - After.

[12]Os teoremas de Medeiros tem esta desiguinação em livros de EDO como por exemplo no livro: R. P. Agarwal & V. Lakshmikantham, Uniqueness and nonuniqueness criteria for Ordinary Differential Equations, Word Scientific, 19??

Teorema 7.4 (Teoremas de Medeiros) *Considerando todas as hipóteses do teorema* (7.3) *de Browder motra-se que:*

1. *Se a aplicação* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times H \to H$ *satisfaz, também, as condições*
$$< \mathbf{f}(x,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} >\leq \frac{1}{2(x-x_0)}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \tag{7.5}$$
para todo $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in H$ *e* $x_0 < x \leq \alpha(r)$*. Então a solução* $\boldsymbol{\phi} : [x_0, \alpha(r)] \to H$ *de* ($\star$) *é única.*

2. *Se a aplicação* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times H \to H$ *satisfaz, também, as condições*
$$< \mathbf{f}(x,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} >\leq w(\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2) \tag{7.6}$$
onde w *é uma função admissível,* $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in H$ *e* $x_0 < x \leq \alpha(r)$*. Então a solução* $\boldsymbol{\phi} : [x_0, \alpha(r)] \to H$ *de* ($\star$) *é única.*

Demonstração - 1. O primeiro resultado: Neste caso usa-se o lema 7.1 de Hille. Sejam $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\psi}$ duas soluções de ($\star$) em $[x_0, \alpha(r)]$. Ou seja,

$$\boldsymbol{\phi}' = \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\phi}), \quad \boldsymbol{\phi}(x_0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\psi}' = \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\psi}(x_0) = \mathbf{u}_0. \tag{a}$$

Seja $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}$. Então
$$\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\psi}).$$

Tomando o produto interno de H de ambos os lados com $\boldsymbol{\varphi}$ tem-se

$$< \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\varphi} >=< \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\varphi} > . \tag{b}$$

Note que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\|\boldsymbol{\varphi}\|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx} < \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi} >= \frac{1}{2}\big[< \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\varphi} > + < \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}' > \big] =< \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\varphi} >, \tag{c}$$

e como $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}$ então de (7.5) resulta

$$< \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\varphi} >=< \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(x,\boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi} >\leq \frac{1}{2(x-x_0)}\|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2. \tag{d}$$

Inserindo (c) e (d) em (b) obtém-se

$$\frac{d}{dx}\|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2 \leq \frac{1}{x-x_0}\|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2.$$

Daí, se $\delta(x) := \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2$ então

$$\delta'(x) \leq \frac{1}{x-x_0}\delta(x).$$

Integrando de x_0 ate x e como por (a) tem-se que $\delta(x_0) = \|\boldsymbol{\phi}(x_0) - \boldsymbol{\psi}(x_0)\|^2 = 0$ então

$$0 \leq \delta(x) \leq \int_{x_0}^{x} \frac{\delta(t)}{t - x_0} dt.$$

Daí e do lema 7.1 de Hille tem-se que $\delta(x) = 0$ para todo $x \in [x_0, \alpha(r)]$. Logo, $\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)$ para todo $x \in [x_0, \alpha(r)]$ ∎

2. O segundo resultado: Neste caso usa-se o lema 7.2. Sejam $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\psi}$ duas soluções de $(\star)$ em $[x_0, \alpha(r)]$ e procede-se de modo similar ao primeiro resultado. Ou seja, repetindo os passos de (a) até (c) acima, o passo (d) é modificado pelo uso da hipótese (7.6) para obter

$$< \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\varphi} >=< \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\phi}) - \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi} >\leq w\left(\|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2\right). \qquad \text{(e)}$$

Inserindo (c) e (e) em (b) obtém-se

$$\frac{d}{dx}\|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2 \leq w\left(\|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2\right).$$

Daí, se $\delta(x) := \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|^2$ então

$$\delta'(x) \leq w(\delta(x)).$$

Note que, por (a) que $\delta(x_0) = \|\boldsymbol{\phi}(x_0) - \boldsymbol{\psi}(x_0)\|^2 = 0$. Integrando de x_0 até x obtém-se

$$0 \leq \delta(x) \leq \int_{x_0}^{x} w\left(\delta(t)\right) dt.$$

Daí e do lema 7.2 resulta que $\delta(x) = 0$ para todo $x \in [x_0, \alpha(r)]$.

Logo, $\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)$ para todo $x \in [x_0, \alpha(r)]$ ∎

Exercícios da Lição 7

Exercício 7.1 *Determinar exemplos de funções que satisfazem as hipóteses do Lema 7.1 de Hille.*

Exercício 7.2 *Determinar exemplos de funções que satisfazem as hipóteses do Lema 7.2.*

Exercício 7.3 *Refaça o Lema de Hille para o caso* $x_0 = 0$. *Ou seja, Suponha* $g : (0, a] \to \mathbb{R}$, *com* $a > 0$, *uma função contínua tal que*

$$g(0) = 0, \;\; g'(0) = 0 \quad e \quad 0 \leq g(x) \leq \int_{0}^{x} \frac{g(t)}{t} dt.$$

Mostre que $g(x) = 0$ *para todo* $x \in [0, a]$.

Exercício 7.4 *Refaça a demonstração do Lema 7.2 para* $x_0 = 0$. *Ou seja, suponha* $w = w(x)$ *uma função real, admissível em* $[0, a]$ *e* $g : [0, a] \to [0, a]$ *uma função contínua tal que*

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^x w(g(t))dt \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq a.$$

Então mostre que $g(x) = 0$ *em* $[0, a]$.

Exercício 7.5 **(a)** *Mostre que o espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *é completo com a métrica*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = < \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} >^{1/2} = \Big[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\Big]^{1/2};$$

(b) *Mostre que* ℓ^2 *é completo com a norma*

$$\|x\| = < \mathbf{x}, \mathbf{x} >^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

(c) *Mostre que* ℓ^p *para* $p \geq 1$ *é completo com a norma*

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Sug.: EK 35

Exercício 7.6 ...

Lição 8 – Sistema de Equações de Primeira Ordem e Equações de Ordem n

Objetiva-se estabelecer existência de soluções para uma classe de sistemas de equações de primeira ordem e equações de ordem n.

O conteúdo desta lição e da lição 9 é parte do Capítulo 6 do livro [3].

Sistemas de Primeira Ordem e Equações de Ordem n

A maioria dos resultados obtidos nas lições anteriores, sobretudo nas lições 2 e 3 permanecem válidos para uma classe de sistemas de equações e equações de ordem n. Portanto, alguns resultados serão apenas enunciados sem demonstração.

Um sistema de equações de primeira ordem é, em geral, representado por

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n), \\ y_2' &= f_2(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n), \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde $y_i = y_i(x)$ para $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ e as funções $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n$ são definidas em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com valores reais.

Portanto, trata-se de um sistema com derivadas $y_1',\, y_2',\, \ldots,\, y_n'$ dadas explicitamente.

Uma equação de ordem n é, de um modo geral, representada por

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{8.2}$$

As equações ou sistemas de ordem superior podem, quando conveniente, ser estudados por meio de sistema do tipo (8.1). Para isto, usa-se as mudanças de variáveis:

$$y =: y_1,\;\; y' =: y_2,\; \ldots,\; y^{(n-2)} =: y_{n-1},\; y^{(n-1)} =: y_n,$$

e derivando estas equações obtém-se o sistema

$$y_1' = y_2,\;\; y_2' = y_3,\; \ldots,\; y_{n-1}' = y_n,\;\; y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{8.3}$$

o qual é do tipo (8.1). Portanto, a equação (8.2) é equivalente ao sistema (8.3).

Definição 8.1 *Uma solução do sistema (8.1) é um conjunto com n funções de-*

riváveis $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ *definidas em* $I = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < a\}$ *satisfazendo*

$$\begin{aligned}
&(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)) \in \Omega;\\
&\phi_1'(x) = f_1(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)),\\
&\phi_2'(x) = f_2(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)),\\
&\qquad\vdots\\
&\phi_n'(x) = f_n(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)).
\end{aligned}$$

Como dito acima, as vezes por simplicidade, sistemas de equações de ordem superior podem ser transformados em sistema de equações do tipo (8.1), como neste exemplo.

Exemplo 8.1 *O movimento de uma partícula com massa* m *considerada em coordenadas retangulares ortogonais* (x, y, z) *é equacionada por meio da segunda lei de Newton ([13]) por*

$$mx'' = f_1(t, x, y, z), \quad my'' = f_2(t, x, y, z), \quad mz'' = f_3(t, x, y, z), \tag{a}$$

onde $' = \frac{d}{dt}$, *e a aceleração da partícula na direção* x, y *e* z *é dada, respectivamente, por* x'', y'' *e* z''. *As funções* f_1, f_2 *e* f_3 *representam as forças atuando na partícula nas direções indicadas. Para representar (a) na forma do sistema (8.1) faz-se as seguintes mudanças de variáveis*

$$t =: x,\ \ x =: y_1,\ \ y =: y_2,\ \ z =: y_3,\ \ x' =: y_4,\ \ y' =: y_5,\ \ z' =: y_6.$$

Assim, o sistema de ordem dois (a) é equivalente ao sistema de ordem um

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_4,\\
y_2' &= y_5,\\
y_3' &= y_6,\\
y_4' &= \frac{1}{m} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_6),\\
y_5' &= \frac{1}{m} f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_6),\\
y_6' &= \frac{1}{m} f_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_6).
\end{aligned}$$

Note que as seis equações deste sistema são do tipo (8.1).

Aplicações à Equações de Ordem 2

Para ilustrar a transformação obtida em (8.3) considera-se três casos especiais de equações de segunda ordem.

[13] Segunda lei de Newton ou Princípio Fundamental da Mecânica: A resultante das forças de agem num corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

1. Equação do tipo $y'' = f(x, y')$: Neste caso a função f não depende de y. Esta equação é equivalente ao seguinte sistema de equações de primeira ordem

$$y' = z, \quad z' = f(x, z). \tag{$*$}$$

Assim, uma função ϕ é uma solução de $y'' = f(x, y')$ se, e somente se, ϕ e ϕ' satisfizem $(*)$.

A resolução de $(*)$**:** obtém-se uma solução φ para a equação $z' = f(x, z)$ e integrando φ encontra-se a solução desejada ϕ de $y'' = f(x, y')$.

Exemplo 8.2 *Considere a equação do tipo Euler:* $xy'' - y' = 0$ *com* $x > 0$. *Se* $y' = z$ *então* $z' - z/x = 0$. *Esta é uma equação linear de primeira ordem em* z. *Uma solução é dada por* $\varphi(x) = \alpha x$ *com* α *constante. Integrando* φ *obtém-se a função* $\phi(x) = \alpha x^2/2 + b$, *sendo* b *constante, a qual é uma solução de* $xy'' - y' = 0$.

2. Equação do tipo $y'' = f(y, y')$: Neste caso a função f não depende de x.

A resolução de $y'' = f(y, y')$: A estratégia de resolução é a seguinte: suponha ϕ uma solução de $y'' = f(y, y')$ e que exista uma função derivável ψ definida em $y = \phi(x)$ tal que

$$\phi'(x) = \psi(\phi(x)). \tag{a}$$

De (a) tem-se que ϕ é uma solução de

$$y' = \psi(y). \tag{b}$$

Derivando (a), por meio de regra da cadeia, tem-se

$$\phi''(x) = \phi'(x)\frac{d\psi}{dy}(\phi(x)) \overset{(a)}{=} \psi(\phi(x))\frac{d\psi}{dy}(\phi(x)). \tag{c}$$

Como ϕ é solução de $y'' = f(y, y')$ então

$$\phi''(x) = f(\phi(x), \phi'(x)) \overset{(a)}{=} f(\phi(x), \psi(\phi(x))). \tag{d}$$

De (c), (d) e como $y = \phi(x)$ então

$$\psi(y)\frac{d\psi}{dy}(y) = f(y, \psi(y)) \quad \text{para todo} \quad y = \phi(x).$$

Fazendo $z := \psi(y)$ obtém-se

$$z\,\frac{dz}{dy} = f(y, z). \tag{e}$$

Logo, resolver a equação $y'' = f(y, y')$ consiste em solucionar o sistema (b), (e). Assim, se ψ for uma solução de (e) então qualquer solução ϕ de (b) será uma solução de $y'' = f(y, y')$.

Exemplo 8.3 *Para* $y \neq 0$ *considera-se o problema de valor inicial*

$$yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \tag{$*$}$$

A equação (e) associada a $yy'' = (y')^2$ *é dada por*

$$z\frac{dz}{dy} = \frac{z^2}{y},$$

a qual pode ser resolvida por separação de variaveis. Assim, a solução geral é a função $\psi(y) = \kappa y$ *com* $\kappa = e^k$. *Daí, a equação (b) torna-se* $y' = \kappa y$ *cuja solução é* $\phi(x) = e^{\kappa x}$. *Portanto,* ϕ *é a solução geral da equação* $(*)_1$. *Usando as condições iniciais tem-se* $\phi(0) = 1$ *e sendo* $\phi'(x) = \kappa e^{\kappa x}$ *resulta* $\phi'(0) = \kappa = 1$. *Logo, a solução do problema* $(*)$ *é* $\phi(x) = e^x$.

3. Equação do tipo $y'' = f(x, y)$ **:** Como a função f depende das variáveis x e y é natural proceder como nas lições 2 e 3. Portanto, considera-se o problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{8.4}$$

e determina-se uma equação integral associada ao problema (8.4). Para isto considera-se $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}$ e supõe-se $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. A tarefa é, portanto, encontrar uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ solução do problema (8.4), a qual será determinada por meio do método das aproximações sucessivas para equações de ordem 2. Assim, integrando $(8.4)_1$ de x_0 a x, usando a fórmula de Newton-Leibnitz e a condição inicial $(8.4)_3$ obtém-se

$$y'(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt.$$

Daí, novamente por integração de x_0 a x, pela fórmula de Newton-Leibnitz e usando a condição inicial $(8.4)_2$ resulta

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y_1 + \int_{x_0}^{x} \Big[\int_{x_0}^{t} f(s, y)ds \Big] dt.$$

Fazendo $u(t) = \displaystyle\int_{x_0}^{t} f(s, y)ds$ e $dv = dt$ obtém-se $u'(t) = f(t, y)$, $u(x_0) = 0$ e $v = t$. Portanto,

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y_1 + x\int_{x_0}^{x} f(t, y)dt - \int_{x_0}^{x} tf(t, y)dt.$$

Logo, o problema (8.4) é equivalente a equação integral

$$y = y_0 + (x - x_0)y_1 + \int_{x_0}^{x} (x - t)f(t, y)dt. \tag{8.5}$$

De modo análogo às lições 2 e 3 tem-se os conceitos de soluções para os problemas (8.4) e (8.5) conforme definições 2.1 e 2.2. Além disso, se a função f for contínua então a sucessão das aproximações sucessivas será definida por

$$\phi_0(x) = y_0, \quad \phi_{k+1}(x) = y_0 + (x - x_0)y_1 + \int_{x_0}^{x} (x - t)f(t, \phi_k(t))dt, \tag{8.6}$$

para $k = 0,\, 1, \ldots \cdot$ Procedendo de modo similar ao teorema 2.3 da lição 2, mostra-se que a sucessão $(\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ definida em (8.6) converge para uma função ϕ solução do problema (8.5) em $I = \{x \in \mathbb{R}; \quad |x - x_0| \leq \alpha\}$ com $\alpha = \min\{a,\ b/M_1\}$ e $M_1 = |y_1| + Ma/2$.

Exemplo 8.4 *Determinar a solução do problema*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{$*$}$$

pelo método das aproximações sucessivas.

Resolução - Usando a sucessão definida em (8.6) tem-se que $f(t, \phi_k(t)) = -\phi_k(t)$. Daí a sucessão das aproximações sucessivas é dada por:

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1,\\
\phi_1(x) &= 1 + \int_0^x (x - t)[-\phi_0(t)]dt = 1 - \int_0^x (x - t)dt = 1 - \frac{x^2}{2!},\\
\phi_2(x) &= 1 + \int_0^x (x - t)[-\phi_1(t)]dt = 1 + \int_0^x (x - t)\Big(\frac{t^2}{2!} - 1\Big)dt\\
&= 1 + \int_0^x x\Big(\frac{t^2}{2!} - 1\Big)dt + \int_0^x (-t)\Big(\frac{t^2}{2!} - 1\Big)dt\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.
\end{aligned}$$

Pelo princípio de indução matemática mostra-se que

$$\phi_k(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\cdot$$

Assim, ϕ_k é a $k-$ésima soma parcial da série de potênciais

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\phi(x) = \cos x$ é a solução procurada do problema $(*)$.

Sistema Vetorial de Primeira Ordem

Nesta secção Ω denotará uma região limitada do $\mathbb{R}^{n+1}$. A notação em negrito será utilizada para representar um vetor ou uma função vetorial. Assim, um elemento de Ω será denotado pelo par $(x, \mathbf{y})$ onde $\mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_n)$. Em $\mathbb{R}^n$ será considerado tanto a **norma euclidiana** $\|\mathbf{y}\| = \left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right)^{1/2}$ quanto a **norma da magnitude** $\|\mathbf{y}\| = |y_1| + \cdots + |y_n|$.

O objetivo agora é obter uma equação vetorial de primeira ordem equivalente ao sistema de equações de primeira ordem (8.1). No sistema (8.1) tem-se $y_i = y_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções com valores $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$. Daí, se $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ então $f_i(x, y_1, \cdots, y_n) =: f_i(x, \mathbf{y})$. Além disso, se $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_n)$ então $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) := \big(f_1(x, \mathbf{y}), \ldots, f_n(x, \mathbf{y})\big)$. Portanto, sendo $\mathbf{y}' := (y_1', \cdots, y_n')$ então o sistema (8.1) é equivalente a equação vetorial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \tag{8.7}$$

Exemplo 8.5 *Considera-se o sistema de equações de primeira ordem*

$$y_1' = x^2 + y_1 - xy_2, \qquad y_2' = y_1 + y_2 - y_1 y_2. \tag{i}$$

Se $f_1(x, \mathbf{y}) = f_1(x, y_1, y_2) = x^2 + y_1 - xy_2$ *e* $f_2(x, \mathbf{y}) = f_2(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 - y_1 y_2$ *então o sistema (i) é equivalente à equação vetorial*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y})) = \left(x^2 + y_1 - xy_2, y_1 + y_2 - y_1 y_2\right).$$

Definição 8.2 *Uma solução do sistema (8.7) é uma função com valores vetoriais derivável* $\boldsymbol{\phi} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *definida por* $\boldsymbol{\phi}(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ *e satisfazendo*

$$(x, \boldsymbol{\phi}(x)) \in \Omega \quad e \quad \boldsymbol{\phi}' = \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\phi}).$$

Exemplo 8.6 *O sistema de equações de primeira ordem* $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ *tem como equação vetorial associada a equação*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y})) = (y_2, -y_1).$$

Uma solução é a função vetorial $\boldsymbol{\phi}(x) = (\operatorname{sen} x, \cos x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Definição 8.3 *Diz-se que* $\mathbf{f}$ *é contínua em* Ω *quando cada função coordenada* f_i *for contínua em* Ω.

Uma função $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ *satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável quando*

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \quad \text{para todo} \quad (x, \mathbf{y}),\ (x, \mathbf{z}) \in \Omega \quad e \quad L > 0.$$

Exemplo 8.7 *A função* $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (x + y_1, y_1 - y_2)$ *para todo* $(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3$ *é Lipschitz, pois usando a norma da magnitude tem-se*

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| = \|(y_1 - z_1, (y_1 - z_1) - (y_2 - z_2))\| =$$
$$|y_1 - z_1| + |(y_1 - z_1) - (y_2 - z_2)| \leq |y_1 - z_1| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|.$$

Daí, como $|y_i - z_i| \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$ *para* $i = 1, 2$ *obtém-se*

$$\|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z})\| \leq 3\,\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\,.$$

A Proposição 2.1 para o caso escalar é equivalente à proposição a seguir, para o caso vetorial.

Proposição 8.1 *Seja* $\Omega = \big\{(x,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| \leq a,\ \|\mathbf{y}-\mathbf{y_0}\| \leq b\big\}$ *ou* $\Omega = \big\{(x,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| \leq a,\ \|\mathbf{y}\| < \infty\big\}$. *Suponha* $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *com* $\partial\mathbf{f}/\partial y_k$ *contínuas em* Ω *para* $k = 1, \ldots, n$. *Se existir* $L > 0$ *tal que*

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_k}(x,\mathbf{y})\right\| \leq L \quad \textit{para todo} \quad (x,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{$*$}$$

então $\mathbf{f}$ *é uma função de Lipschitz.*

Demonstração - A demonstração é feita de modo similar ao caso escalar. Para isto, considera-se $(x,\mathbf{y}),\ (x,\mathbf{z}) \in \Omega$ e define-se a função vetorial $F : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por

$$F(\theta) = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{z} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z})\right).$$

A função F estará bem definida se $\mathbf{z} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \in \Omega$ para todo $\theta \in [0,1]$. Mais isto é fato, pois

- Se $\|\mathbf{y}-\mathbf{y_0}\| \leq b$ então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z}) - \mathbf{y_0}\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{y_0} - \theta\mathbf{z} + \theta\mathbf{y_0} + \theta\mathbf{y} - \theta\mathbf{y_0})\| = \\ \|(1-\theta)(\mathbf{z}-\mathbf{y_0}) + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{y_0})\| \leq (1-\theta)\,\|\mathbf{z}-\mathbf{y_0}\| + \theta\,\|\mathbf{y}-\mathbf{y_0}\| \\ \leq (1-\theta)b + \theta b = b. \end{aligned} \tag{a}$$

- Se $\|y\| < \infty,\ \|z\| < \infty$ então

$$\|\mathbf{z} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z})\| \leq (1-\theta)\,\|\mathbf{z}\| + \theta\,\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{y}\| < \infty. \tag{b}$$

Portanto, de (a) e (b) tem-se que F está bem definida. Resta mostrar que $\mathbf{f}$ é Lipschitz. Para isto, note que

$$F'(\theta) = (y_1 - z_1)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}\left(x, \mathbf{z} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z})\right) + \cdots + (y_n - z_n)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_n}\left(x, \mathbf{z} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{z})\right).$$

Agora, usando a hipótese $(*)$ tem-se que $\|F'(\theta)\| \leq L\,\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$. Como

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z}) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(\theta)dt$$

então $\|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z})\| \leq L\,\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$ ■

Observação 8.1 *No Exemplo 8.7 encontra-se*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(x,\mathbf{y}) = (1,1) \quad e \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_2}(x,\mathbf{y}) = (0,-1).$$

Assim, usando a norma da amplitude tem-se

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(x,\mathbf{y}) \right\| = 2 \quad e \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_2}(x,\mathbf{y}) \right\| = 1.$$

Portanto, pela Proposição 8.1 conclui-se que $\mathbf{f}$ *é Lipschitz em* Ω*. Como foi visto no Exemplo 8.7 a função* $\mathbf{f}$ *é Lipschitz com constante* $L = 3$.

Existência e Unicidade de Soluções de Sistemas Vetoriais

Seja $\Omega = \big\{(x,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| \le a,\ \|\mathbf{y} - \mathbf{y_0}\| \le b\big\}$ e $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, uma função vetorial contínua. O objetivo é mostrar que o problema vetorial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \ \ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0} =: (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \tag{8.8}$$

tem pelo menos uma solução, e sob a hipótese de Lipschitz na variável dependente $\mathbf{y}$ ela é única.

Como o sistema (8.1) é equivalente à equação vetorial (8.7) então o problema (8.8) é equivalente ao problema

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\, y_1,\, \dots,\, y_n), \quad y_1(x_0) = \alpha_1, \\ y_2' &= f_2(x,\, y_1,\, \dots,\, y_n), \quad y_2(x_0) = \alpha_2, \\ &\ \vdots \\ y_n' &= f_n(x,\, y_1,\, \dots,\, y_n), \quad y_n(x_0) = \alpha_n. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Se $\mathbf{f}$ é uma função contínua em Ω, procedendo como na lição 3, mostra-se que o problema (8.8) tem pelo menos uma solução em I, o que implica dizer que o problema (8.9) tem, também, pelo menos uma solução em I. Além disso, se $\mathbf{f}$ satisfaz a condição de Lipschitz em Ω mostra-se, por exemplo, por meio do método das aproximações sucessivas que (8.8) tem uma única solução em I, e isto implica (8.9) ter, também, uma única solução em I.

A sucessão das aproximações sucessivas para uma função vetorial $\mathbf{f}$ é definida de modo similar à sucessão (2.6) da lição 2. Ou seja, para $k = 0,\, 1, \dots,$ define-se

$$\boldsymbol{\phi}_0(x) = \mathbf{y}_0,\ \dots,\ \boldsymbol{\phi}_{k+1}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\phi}_k(t))dt. \tag{8.10}$$

Exemplo 8.8 *Considere o sistema do Exemplo 8.6, isto é,* $y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1$ *com condição inicial* $\mathbf{y}(0) = (0,1)$*. Assim,* $\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) = (y_2, -y_1)$*. Portanto, tem-se*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_0(x) &= (0,1),\\
\boldsymbol{\phi}_1(x) &= (0,1) + \int_0^x \mathbf{f}(t,(0,1))dt = (0,1) + (x,0) = (x,1),\\
\boldsymbol{\phi}_2(x) &= (0,1) + \int_0^x (1,-t)dt = (0,1) + (x,-x^2/2) = (x, 1 - x^2/2!),\\
\boldsymbol{\phi}_3(x) &= (0,1) + \int_0^x (1 - t^2/2, -t)dt = (x - x^3/3!, 1 - x^2/2!).
\end{aligned}$$

Daí mostra-se, pelo princípio indução matemática, que

$$\boldsymbol{\phi}_k(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}\, , \, 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right),$$

a qual existe para todo $x \in \mathbb{R}$ *e* $\boldsymbol{\phi}_k(x) \to \boldsymbol{\phi}(x) = (sen\, x, \cos x)$ ■

Em resumo, os resultados de existência de soluções para sistemas de equações de primeira ordem, ou equivalentemente, existência de soluções para equações vetorial de primeira ordem são estabelecidos de modo similares aos Teoremas 2.3, 3.1 e Corolário 3.1 das lições 2 e 3. Portanto, anuncia-se a seguir os respectivos resultados cuja demonstração são as mesmas trocando em todas as etapas da prova y, f, ϕ por $\mathbf{y}$, $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\phi}$, respectivamente e as métricas.

Teorema 8.1 (EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES LOCAIS) *Seja* $\mathbf{f}$ *uma função vetorial contínua em* $\Omega = \{(x,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x - x_0| \le a,\ \ \|\mathbf{y} - \mathbf{y_0}\| \le b\}$ *com valores em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\|f(x,\mathbf{y})\| \le M$ *para todo* $(x,\mathbf{y}) \in \Omega$*. Além disso, suponha que* $\mathbf{f}$ *satisfaz a condição de Lipschitz estabelecida na Definição 8.3. Então a sucessão das aproximações sucessivas* $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definidas em (8.10) convergem no intervalo*

$$I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| \le \alpha\}, \ \text{ com } \ \alpha = \{a,\ b/M\},$$

para uma função vetorial $\boldsymbol{\phi}$ *solução do Problema de Cauchy (8.8) para todo* $x \in I_\alpha$.

Teorema 8.2 (EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NÃO LOCAIS) *Seja* $\mathbf{f}$ *uma função vetorial contínua definida em* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x - x_0| \le a,\ \ \|\mathbf{y}\| < \infty\}$ *com valores em* $\mathbb{R}^n$ *e satisfazendo a condição de Lipschitz estabelecida na Definição 8.3. Então a sucessão das aproximações sucessivas* $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definidas em (8.10) convergem no intervalo* $I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| \le a\}$ *para uma função vetorial* $\boldsymbol{\phi}$ *solução do Problema de Cauchy (8.8) para todo* $x \in I$.

Corolário 8.1 (EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES GLOBAIS) *Seja* $\mathbf{f}$ *satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 8.2 em* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| < \infty,\ \ \|\mathbf{y}\| < \infty\}$*. Então o problema de Cauchy (8.8) tem pelo menos uma solução para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios da Lição 8

Exercício 8.1 *Resolva pelo método das aproximações sucessivas*

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Exercício 8.2 ...

Exercício 8.3 ...

Exercício 8.4 *Seja* $\mathbf{f}$ *satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 8.1. Mostre que*

$$|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\phi}_k(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} e^{L\alpha} \quad \text{para todo} \quad x \in I_\alpha.$$

Sugestão: Repetir a Etapa 3 da demonstração do Teorema 2.3 adaptando ao caso vetorial.

Exercício 8.5 *Suponha* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *funções contínuas e lipschitziana em* $\Omega = \left\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x - x_0| \leq a,\ \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\right\}$. *Sejam* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} : I \to \mathbb{R}^n$ *soluções dos problemas de Cauchy*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_1,$$
$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_2,$$

respectivamente. Se para $\epsilon > 0$ *e para* $\delta > 0$ *tem-se*

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(x, \mathbf{y})\| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad (x, \mathbf{y}) \in \Omega \quad \text{e} \quad \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| < \delta,$$

então mostre que

$$\|\boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\psi}(x)\| \leq \delta e^{L|x - x_0|} + \frac{\epsilon}{L}\left(e^{L|x - x_0|} - 1\right) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Em particular, o problema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \ \ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

tem uma única solução em $I = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq a\}$.

Sugestão: Proceda como no Exercício 3.6 da lição 3.

Lição 9 – Sistemas de Equações Lineares e Equações Lineares de Ordem n

O objetivo é estabelecer um análise qualitativo das soluções de sistemas de equações lineares e equações lineares de ordem superior.

Os sistemas de equações lineares e equações lineares de ordem superior são casos particulares dos considerados na lição 8. Portanto, toda a teoria sobre existência e unicidade de soluções desenvolvida na lição 8 é aplicável aos sistemas de equações lineares e equações lineares de ordem superior.

O conteúdo desta lição é parte do Capítulo 6 do livro [5].

Sistemas Lineares

Um sistema de equações de primeira ordem é dito linear quando

$$\left|\begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \qquad\vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{array}\right. \tag{9.1}$$

onde a_{ij} e b_i são funções reais ou complexas definidas em $\mathbb{R}$ para $i, j = 1, \ldots, n$.

Sejam $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ com $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e

$$\left|\begin{array}{l} f_1(x,\mathbf{y}) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ f_2(x,\mathbf{y}) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \qquad\vdots \\ f_n(x,\mathbf{y}) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{array}\right.$$

então (9.1) é equivalente à equação vetorial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}). \tag{9.2}$$

Note que as componentes da função $\mathbf{f}$ podem, também, ser escritas por

$$f_i(x,\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.3}$$

Além disso, (9.1) pode ser escrito, de modo equivalente, na seguinte forma matricial

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + B(x) \tag{9.4}$$

onde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

Uma solução de (9.1) é o cojunto de funções diferenciáveis $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ definidas em $\mathbb{R}$ com valores reais ou complexos. De modo equivalente uma solução de (9.2) é uma função vetorial diferenciável $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ definidas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 9.1 *Seja* $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *e considere a equação vetorial linear*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \textit{onde} \quad f_1(x, \mathbf{y}) = y_1 \quad \textit{e} \quad f_2(x, \mathbf{y}) = -y_2. \tag{a}$$

Então o sistema de equações lineares associado é dado por

$$y_1' = y_1 \quad \textit{e} \quad y_2' = -y_2, \tag{b}$$

cuja soluções são as funções $\phi_1(x) = \kappa_1 e^x$, $\phi_2(x) = \kappa_2 e^{-x}$ *definidas em todo* $x \in \mathbb{R}$ *com* κ_1, κ_2 *constantes quaisquer. Logo, as soluções da equação vetorial (a) são funções vetoriais do tipo* $\boldsymbol{\phi}(x) = (\kappa_1 e^x, \kappa_2 e^{-x})$.

Note que o sistema (b) pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Proposição 9.1 *Seja* Ω *como nas hipóteses dos Teoremas 8.1 ou 8.2. Se as funções coeficientes* a_{ij} *são contínuas em* $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ *então a função vetorial* $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *é lipschitziana.*

Demonstração: Como a_{ij} são funções contínuas no compacto $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ então ela é limitada para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Assim, se $L > 0$ é uma constante qualquer tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}(x)| \leq L \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{e para todo} \quad x \in I,$$

então de (9.3) tem-se

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) = a_{ij}(x) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \right\| &= \|(a_{1j}(x), \ldots, a_{nj}(x))\| = |a_{1j}(x)| + \cdots + |a_{nj}(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}(x)| \leq L \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 8.1 tem-se que $\mathbf{f}$ é lipschitziana. Assim, como dito acima, toda a teoria da lição 8 é aplicável aos sistemas lineares. Portanto, o seguinte teorema corresponde aos Teoremas 8.1 e 8.2.

Teorema 9.1 *Seja Ω como nos Teoremas 8.1, 8.2. Condiderando a equação linear $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ com as componentes de $\mathbf{f}$ dadas em (9.3) e as funções a_{ij}, b_i contínuas em $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ então existe uma única função vetorial $\boldsymbol{\phi}$ definida em I solução do problema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \;\; \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I,$$

onde $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}) \in \mathbb{R}^n$.

No caso linear, aqui abordado, as soluções são definidas em toda reta $\mathbb{R}$ e todo teoria acima aplica-se às equações de ordem superior.

Equações Lineares de Ordem 2

Uma equação linear de segunda ordem é, em geral, dada por

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y + q(x) = 0 \quad \text{com} \quad p_0(x) \neq 0, \tag{9.6}$$

onde p_i e q são funções contínuas definidas $\mathbb{R}$. A equação (9.6) é dita **normalizada** quando o coeficiente de y'' é 1. Como $p_0(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ a equação (9.6) pode ser sempre normalizada. Considera-se, aqui, o caso normalizado e $q(x) = 0$. ([14]) O problema de valor inicial associadso à equação (9.6) pode ser escrito por

$$y'' + \sum_{i=1}^{2} p_i(x)y^{(2-i)} = 0, \;\; y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1. \tag{9.7}$$

Como visto na mudança de variáveis (8.3), o problema (9.6) pode ser transformado, fazendo $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, no problema de sistema de equações lineares de primeira ordem

$$\left| \begin{array}{lcll} y_1' & = & y_2, & y_1(x_0) = y_{01}, \\ y_2' & = & -p_1(x)y_2 - p_2(x)y_1, & y_2(x_0) = y_{02}. \end{array} \right. \tag{9.8}$$

Portanto, sendo (9.7) e (9.8) equivalentes então uma função ϕ é solução de (9.7) em $\mathbb{R}$ se, e somente se, a função vetorial $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \, \phi_2)$ é solução de (9.8) em $\mathbb{R}$ e reciprocamente.

Note que se $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^t$ então (9.8) é equivalente ao problema matricial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_2(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02})^t. \tag{9.9}$$

Assim, os três problemas (9.7), (9.8) e (9.9) são equivalentes. O corolário a seguir é uma consequência imediata do Teorema 9.1.

[14] Quando $q(x) = 0$ a equação (9.6) é dita homogênea.

Corolário 9.1 *Se p_1 e p_2 são funções contínuas em $\mathbb{R}$ então existe uma única função real ϕ definida em $\mathbb{R}$ solução do problema (9.7).*

Demonstração: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ com componentes $f_1(x, \mathbf{y}) = y_2$ e $f_2(x, \mathbf{y}) = -p_1(x)y_2 - p_2(x)y_1$. Se $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ então de (9.7) e (9.8) tem-se o problema vetorial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \ \ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Como $\mathbf{f}$ é contínua em Ω então pelo Teorema 9.1 tem-se o resultado ■

Recorde-se que uma solução $\phi = \phi(x)$ definida em $\mathbb{R}$ da equação $(9.7)_1$ ([15]) é, pelo **princípio de superposição**, dada pela combinação linear das soluções ϕ_1 e ϕ_2. Ou seja, $\phi(x) = \kappa_1\phi_1(x) + \kappa_2\phi_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e κ_1 e κ_2 constantes. Mostra-se que

Proposição 9.2 *Se $\boldsymbol{\phi}(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$ é solução da equação $(9.9)_1$, isto é, solução da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ então*

1. *$\boldsymbol{\phi}(x) = 0$ é sempre uma solução de $(9.9)_1$. A chamada solução trivial;*
2. *Se $\boldsymbol{\phi}(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$ então $\boldsymbol{\phi}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;*
3. *$\phi(x) := \kappa_1\phi_1(x) + \kappa_2\phi_2(x)$, onde κ_1 e κ_2 são constantes é uma solução para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Para a demonstração dos resultados desta proposição consulte, por exemplo, Boyce-DiPrima [1].

Dependência Linear: Equações Lineares de Ordem 2

Proposição 9.3 *Se ϕ_1, ϕ_2 são soluções da equação $(9.9)_1$ em $\mathbb{R}$ então ϕ_1, ϕ_2 são LD ([16]) em $\mathbb{R}$ se, e somente se, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, os valores numéricos $\phi_1(x_0)$, $\phi_2(x_0)$ são LD.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sendo ϕ_1, ϕ_2 LD em $\mathbb{R}$ então existem constantes κ_1, κ_2, sendo pelo menos uma delas não nula tais que

$$\kappa_1\phi_1(x) + \kappa_2\phi_2(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

[15] A notação indexada $(9.1)_1$ refere-se à primeira identidade ou equação de (9.1).

[16] Funções, $f_1, \ldots, f_n$, definidas em $\mathbb{R}$ são ditas linearmente dependentes - LD se, e somente se, existem constantes $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulas tais que $\kappa_1 f(x) + \cdots + \kappa_n f_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E, se $\kappa_1 f_1(x) + \cdots + \kappa_n f_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ implicar $\kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0$ então $f_1, \ldots f_n$ são ditas linearmente independentes - LI.

Em particular, esta combinação linear é nula para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Logo, $\phi_1(x_0)$ e $\phi_2(x_0)$ são LD.

($\Leftarrow$) Sendo $\phi_1(x_0)$, $\phi_2(x_0)$ LD então existem constantes κ_1, κ_2, sendo pelo menos uma delas não nula tais que

$$\kappa_1\phi_1(x_0) + \kappa_2\phi_2(x_0) = 0. \tag{a}$$

Seja $\phi(x) = \kappa_1\phi_1(x) + \kappa_2\phi_2(x)$. Então, pela Proposição 9.2 item 3, ϕ é solução de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Daí e de (a) tem-se que $\phi(x_0) = 0$. Portanto, novamente, pela Proposição 9.2 item 2 resulta que $0 = \phi(x)$. Logo, ϕ_1, ϕ_2 são LD em todo $x \in \mathbb{R}$
■

Há um teste que permite decidir se duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 do problema (9.7) são linearmente independentes ou não. Para isto utiliza-se o conceito de o **Wronskiano**.

Definição 9.1 *O Wronskiano de duas funções deriváveis f, g definidas em $\mathbb{R}$ é o determinante*

$$W(f(x), g(x)) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Definição 9.2 *As soluções ϕ_1, ϕ_2 de $(9.7)_1$ formam um sistema fundamental de soluções se, e somente se, o $W(\phi_1(x_0), \phi_2(x_0)) \neq 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Teorema 9.2 *Se p_1 e p_2 são funções contínuas em $\mathbb{R}$ então as soluções ϕ_1 e ϕ_2 de $(9.7)_1$ são linearmente dependentes se, e somente se, $W(\phi_1(x_0), \phi_2(x_0)) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.*

O Teorema 9.2 caracteriza o sistema fundamental de soluções de $(9.7)_1$. Ou seja, o sistema fundamental de soluções de $(9.7)_1$ é o conjunto formado pelas soluções linearmente indepentes.

Demonstração do Teorema 9.2: ($\Rightarrow$) Sejam ϕ_1 e ϕ_2 soluções linearmente dependente em $\mathbb{R}$ de (9.7). Então por definição existem constantes κ_1, κ_2, sendo pelo menos uma delas não nula tais que

$$\kappa_1\phi_1(x) + \kappa_2\phi_2(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{i}$$

Derivando obtém-se

$$\kappa_1\phi_1'(x) + \kappa_2\phi_2'(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{ii}$$

Supondo $\kappa_1 \neq 0$, caso contrário sopõe-se $\kappa_2 \neq 0$ (já que um deles é não nulo), e multiplicando (i) por ϕ_2'/κ_1, multiplicando (ii) por $-\phi_2/\kappa_1$ e adicionando as igualdades resultantes obtém-se

$$\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Daí e da Definição 9.1 tem-se $W(\phi_1(x), \phi_2(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Suponha que $W(\phi_1(x_0), \phi_2(x_0)) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Considerando o sistema de equações algébricas (i) e (ii) com incóginitas κ_1, κ_2, isto é

$$\left| \begin{array}{l} \kappa_1\phi_1(x_0) + \kappa_2\phi_2(x_0) = 0, \\ \kappa_1\phi_1'(x_0) + \kappa_2\phi_2'(x_0) = 0, \end{array} \right. \tag{iii}$$

tem-se que (iii) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como (iii) é um sistema homogêneo e seu wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)$ é nulo em x_0 então (iii) possui soluções κ_1, κ_2 não necessariamente nulas. Daí define-se, para estes κ_1, κ_2, a função

$$\phi(x) = k_1\phi_1(x) + k_2\phi_2(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{iv}$$

Assim, $\phi = \phi(x)$ é uma solução de $(9.7)_1$ e por (iii) a função ϕ satisfaz as condições iniciais

$$\phi(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi'(x_0) = 0.$$

Juntando estas condições iniciais (nulas) com $(9.9)_1$ tem-se que $\phi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí e da unicidade de soluções, conforme Corolário 9.1, tem-se por (iv) que $k_1\phi_1(x) = -k_2\phi_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Supondo, por exemplo, $k_1 \neq 0$ tem-se que $\phi_1(x) = -(k_2/k_1)\phi_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, por definição ϕ_1 e ϕ_2 são LD em $\mathbb{R}$ ■

A Equações Lineares de Ordem n

Os conceitos e resultados associados à equação $(9.7)_1$ são, também, válidos para as equações lineares de ordem n. Portanto, faz-se apenas uma dissertação sem demonstração dos fatos. Em geral, uma equação linear de ordem n é uma equação da forma

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y + q(x) = 0,$$

onde p_i, q são funções contínuas em $\mathbb{R}$ e $p_0(x) \neq 0$. Portanto, se $q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ a equação acima pode ser escrita na forma normalizada

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)y^{(n-i)} = 0. \tag{9.10}$$

Como visto para equações de ordem 2, aqui também, obtém-se um sistema de equações lineares de primeira ordem equivalente à equação (9.10) dado por

$$\left| \begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2, \\ & \vdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n, \\ y_n' & = & -p_1 y_n - p_2 y_{n-1} - \cdots - p_n y_1, \end{array} \right. \tag{9.11}$$

ou, também, de modo equivalente, para $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ tem-se a forma matricial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \ldots & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

onde $A = A(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Assim, o problema associado à eq. (9.10) é dado por

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y^{(n-i)} = 0, \;\; y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{9.13}$$

o qual é equivalente ao problema matricial associado a (9.12). Ou seja,

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})\,. \tag{9.14}$$

Assim, a função ϕ é solução de (9.13) se, e somente se, $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)}\right)$ é solução de (9.14) e reciprocamente. Uma versão similar do Corolário 8.1 e da Proposição 8.1 são, respectivamente por:

Observação 9.1 *Se p_i, para $i = 1, \ldots, n$, são funções contínuas em $\mathbb{R}$ então existe uma única função real ϕ definida em $\mathbb{R}$ satisfazendo o problema (9.13).*

Observação 9.2 *Se $\boldsymbol{\phi}(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ é solução apenas da equação $(9.14)_1$ então*

1. *$\boldsymbol{\phi}(x) = 0$ é sempre uma solução de $(9.14)_1$. A chamada solução trivial;*

2. *Se $\boldsymbol{\phi}(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$ então $\boldsymbol{\phi}(x) = 0$ em $\mathbb{R}$;*

3. *$\phi(x) := \kappa_1\phi_1(x) + \kappa_2\phi_2(x) + \cdots + \kappa_n\phi_n(x)$, para κ_i constantes e $i = 1, \ldots, n$, é uma solução.*

Dependência Linear: Equações Lineares de Ordem n

Procedendo como no caso de ordem 2 a versão da Proposição 9.2 é dada por:

Observação 9.3 *Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ soluções de (9.13)$_1$ em $\mathbb{R}$. Então $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são LD em $\mathbb{R}$ se, e somente se, os valores numéricos $\phi_1(x_0), \ldots, \phi_n(x_0)$ são LD para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Portanto, a equivalência de $(9.13)_1$ e $(9.14)_1$ preserva a independência linear, isto é, se $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ são soluções LI de $(9.11)_1$ em $\mathbb{R}$ então as funções vetoriais $\boldsymbol{\phi}_i(x) = (\phi_i(x), \phi_i'(x), \ldots, \phi_i^{(n-1}(x))$ são soluções LI de $(9.14)_1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e vice-versa.

Definição 9.3 (Sistema Fundamental) *Se $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ são n soluções quaisquer de (9.13)$_1$ em $\mathbb{R}$ então elas formam um sistema fundamental de soluções se, e somente se, o wronskiano das componentes de $\boldsymbol{\phi}$ tomado em algum x_0 é não nulo. Ou seja,*

$$W(\phi_1(x_0), \ldots, \phi_n(x_0)) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \ldots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \ldots & \phi_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

O resultado similar ao Teorema 9.2 tem o enunciado:

Teorema 9.3 *Se $p_1, \ldots, p_n$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$ então as soluções ϕ_1, ϕ_2 $\ldots$, ϕ_n de (9.13)$_1$ são LI se, e somente se, $W(\phi_1(x_0), \ldots, \phi_n(x_0)) \neq 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.*

A demonstração é feita de modo análoga a do Teorema 9.2.

Soluções na Forma Matricial: Método das Aproximações Sucessivas

Analisa-se, agora, o sistema (9.1) utilizando a sua forma matricial (9.4). Desta forma as soluções são, também, dadas na forma matricial.

Portanto, se $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ e $b_i(x) = 0$ então de (9.4) obtém-se o problema de equação matricial

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9.15}$$

onde $A(x)$ é a matriz definida em (9.5).

Definição 9.4 *Supondo as funções $a_{ij} = a_{ij}(x)$ da matriz A contínuas e deriváveis em $\mathbb{R}$ então define-se novas matrizes quadradas de ordem n por integração e por derivação dadas por*

$$B(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)dt = \left(\int_{x_0}^{x} a_{ij}(t)dt\right)_{n\times n} \quad e \quad C(x) = \frac{d}{dx}A(x) = \left(\frac{d}{dx}a_{ij}(x)\right)_{n\times n}.$$

Usando a linearidade dos operadores integração e derivação resulta

$$\frac{d}{dx}\left[A_1(x) + A_2(x)\right] = \frac{d}{dx}A_1(x) + \frac{d}{dx}A_2(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[A_1(x)A_2(x)\right] = A_1(x)\Big[\frac{d}{dx}A_2(x)\Big] + \Big[\frac{d}{dx}A_1(x)\Big]A_2(x);$$

$$\int_{x_0}^{x} \left(A_1(t) + A_2(t)\right) dt = \int_{x_0}^{x} A_1(t)dt + \int_{x_0}^{x} A_2(t)dt.$$

Procedendo como na lição 2 e usando a Definição 9.4 tem-se por meio da fórmula de Newton-Leibniz que o problema (9.15) é equivalente ao problem integral matricial

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)\mathbf{y}(t)dt. \tag{9.16}$$

O Método das Aproximações Sucessivas: Conforme a lição 2 a sucessão das aproximações sucessivas $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por

$$\boldsymbol{\phi}_0(x) = \mathbf{y}_0, \ldots, \boldsymbol{\phi}_{k+1}(x) \quad = \quad \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)\mathbf{y}_k(t)dt \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{9.17}$$

Exemplo 9.2 *Uma aplicação simples da construção da sucessão $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida em (9.17) é quando A é uma matriz constante. Assim, (9.16) é dado por*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + A\int_{x_0}^{x} \mathbf{y}(t)dt. \tag{a}$$

Neste caso a matriz B da Definição 9.4 é dada por

$$B(x) = A\int_{x_0}^{x} dt = (x - x_0)A. \tag{b}$$

Daí, de (9.17) e sendo $I = I_n$ a matriz identidade de ordem n tem-se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_0(x) &= \mathbf{y}_0;\\
\boldsymbol{\phi}_1(x) &= \mathbf{y}_0 + A\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\phi}_0(t)dt = \mathbf{y}_0 + (x - x_0)A\mathbf{y}_0 \overset{(b)}{=} \mathbf{y}_0[I + B(x)];\\
\boldsymbol{\phi}_2(x) &= \mathbf{y}_0 + A\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\phi}_1(t)dt = \mathbf{y}_0 + A(x - x_0)\mathbf{y}_0 + A^2\frac{(x - x_0)^2}{2!}\mathbf{y}_0\\
&= \mathbf{y}_0\Big[I + B(x) + \frac{1}{2!}B^2(x)\Big].
\end{aligned}$$

Mostra-se, por indução matemática, que

$$\boldsymbol{\phi}_k(x) = \mathbf{y}_0 \left[I + B(x) + \frac{1}{2!}B^2(x) + \cdots + \frac{1}{k!}B^k(x) \right] \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{c}$$

Procedento de modo similar ao Teorema 2.3 mostra-se quando $k \to \infty$ *que* $\boldsymbol{\phi}_k$ *converge uniformemente em* $I_\alpha = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| \leq \alpha\}$ *para uma função* $\boldsymbol{\phi}$ *solução de (a). De fato, fazendo o vetor* $\mathbf{y}_0 = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ *em (c), o lado direito reduz-se à i-ésima linha da matriz*

$$I + \sum_{j=1}^{n} \frac{B^j(x)}{j!}. \tag{d}$$

Daí, cada linha de (d) converge unifomemente em I_α *quando* $k \to \infty$*. A matriz assim definida é simbolicamente denotada por* $e^{B(x)}$*. Então a solução de (a) pode ser representada por*

$$\boldsymbol{\phi}(x) = e^{B(x)}\mathbf{y}_0 = \exp\Big\{ \int_{x_0}^{x} A dt \Big\}\mathbf{y}_0. \tag{e}$$

Observação 9.4 *A convergência da sucessão* $(\boldsymbol{\phi}_k(x))$ *definida em (c) é válida em todo* I *e não somente em* I_α*. Para ver isto, suponha* I *um intervalo limitado de comprimento* h *e que* $A(x)$ *seja contínua em* I*. Então existe* $M > 0$ *tal que* $|a_{ij}(x)| \leq M$ *para todo* $x \in I$*. Portanto, de (b) resulta*

$$\big|B^j(x)\big|_{\mathbb{R}} \leq (hM)^j \quad \textit{para cada} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Daí, (d) converge uniformemente em I *quando* $n \to \infty$*.*

Exercícios da Lição 9

Exercício 9.1 *Um conjunto formado de funções* $f_i(x)$*, com* $i = 1, \ldots, m$*, é dit0* **linearmente independente** - *LI se, e somente se, a identidade*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I$$

implicar $\alpha_i = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, m$*. No caso de funções com valores vetoriais a definição é análoga. Considere o problema*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} \quad \textit{com} \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad \textit{onde} \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n). \tag{$*$}$$

Sejam $\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x)$ *soluções de* $(*)$*. Mostre que* $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x)\}$ *é LI se, e somente se, o conjunto de vetores constantes* $\{\phi_1(x_0), ..., \phi_k(x_0)\}$ *é LI.*

Exercício 9.2 *Mostre que não existe conjunto de soluções de (*$*$*) com mais de* k *elementos LI.*

Exercício 9.3 *Sejam* $\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x)$ *soluções LI de (*$*$*). Mostre que quaisquer solução* $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x)$ *de (*$*$*) pode ser escrita na forma*

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi_i(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in I. \qquad (**)$$

Por esta razão diz-se que $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ *forma um sistema fundamental de soluções de (*$*$*).*

Sug.: ...

Exercício 9.4 *Mostre que duas soluções* ϕ_1, ϕ_2 *de (9.5) são LI em* I *se, e somente se,* $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$*.*

Exercício 9.5 *Sejam* ϕ_1, ϕ_2 *duas soluções de (9.5) em* I *e* $x_0 \in I$*. Mostre que* ϕ_1, ϕ_2 *são LI em* I *se, e somente se,* $W(\phi_1, \phi_2)(x_0) \neq 0$*.*

Exercício 9.6 *Sejam* ϕ_1, ϕ_2 *duas soluções de (9.5) em* I*. Mostre que toda solução de (9.5) pode ser escrita de modo* **único** *por* $\phi(x) = k_1\phi_1(x) + k_2\phi_2(x)$ *onde* k_1, k_2 *são constantes*

Exercício 9.7 *Se* ϕ_1, ϕ_2 *são duas soluções de (9.5) em* I *então mostre que*

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) = e^{k_1(x-x_0)} W(\phi_1, \phi_2)(x_0) \quad \textit{para todo} \quad x \in I.$$

Lição 10 – Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

Objetiva-se estabelecer uma análise qualitativo das soluções de sistemas de equações lineares e equações de ordem superiores com coeficientes constantes por meio dos valores e dos vetores característicos da matriz definida por sistemas de equações lineares.

Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Considera-se o problema com n equações e com coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ constantes dado por

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad y_i(x_0) = y_{0i} \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, n,$$

o qual é equivalente à sua forma matricial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{onde} \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n). \tag{10.1}$$

O sistema $(10.1)_1$ é um caso particular do sistema (9.1). Portanto, usando o Teorema 9.1 conclui-se que a solução do problema (10.1) existe e é única para todo $x \in \mathbb{R}$ e suas derivadas (derivadas de todas as ordens), também, existem em $\mathbb{R}$.

Observação 10.1 *A diferença essencial entre o sistema (10.1) e o caso mais geral considerado em (9.1) é que se $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x)$ é uma solução de (10.1) então sua derivada primeira $\boldsymbol{\phi}'$ também é uma solução de (10.1), pois sendo A uma matriz constante tem-se*

$$(A\boldsymbol{\phi})' = A\boldsymbol{\phi}'. \tag{$*$}$$

Sendo $\boldsymbol{\phi}$ solução de (10.1) resulta que $\boldsymbol{\phi}' = A\boldsymbol{\phi}$. Derivando esta identidade e usando $(*)$ obtém-se $\left(\boldsymbol{\phi}'\right)' = A\boldsymbol{\phi}'$. Repetindo este processo conclui-se que a derivada de qualquer ordem ou qualquer combinação linear delas são, também, soluções de (10.1) ■

Vetores Característicos - Valores Caracteristicos

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz real. Recorde-se que um vetor característico de A é um **vetor não nulo y** (real ou complexo) tal que

$$A\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad \text{ou} \quad (A - \lambda I_n)\mathbf{y} = 0, \tag{10.2}$$

onde λ é um número real ou complexo. O número λ é chamado de valor característico da matriz A e $\mathbf{y}$ é o vetor característico correspondente a λ. Em termos de componentes (10.2) é escrito por

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = 0,\\
&a_{21}y_1 + (a_{22}-\lambda)y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = 0,\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)y_n = 0.
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

O sistema (10.3) admitirá uma **solução não nula** $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ somente para os valores de λ que anulam o polinômio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n). \tag{10.4}$$

O número λ é um valor característico de A se, e somente se, satisfaz a equação $P_A(\lambda) = 0$.

Note que $P_A(\lambda) = 0$ é uma equação algébrica de ordem (grau) n. Assim sendo, A não pode ter mais de n valores característicos diferentes.

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que o polinômio $P_A(\lambda)$ têm todas as raízes em $\mathbb{C}$. O que não ocorre em $\mathbb{R}$.

Proposição 10.1 *Sejam $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ vetores característicos de A associados aos distintos valores característicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ respectivamente. Então $\mathbf{y}_i$ é LI para $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstração - Usa-se o *princípio de indução matemática.* De fato, se $m = 1$ então a proposição é válida, pois $\kappa\mathbf{y}_1 = 0$ implica $\kappa = 0$ já que $\mathbf{y}_1$ é um vetor característico de A e por definição $\mathbf{y}_1 \neq 0$. Suponha a afirmação válida para um determinado $m = n - 1$. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \mathbf{y}_i = 0 \quad \text{implica} \quad \kappa_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{i}$$

Deseja-se mostrar que

$$\text{Se} \quad \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \mathbf{y}_i = 0 \quad \text{então} \quad \kappa_i = 0 \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{ii}$$

Aplicando A a ambos os lados da identidade (ii) e usando o fato de $\mathbf{y}_i$ ser vetor característico tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i \lambda_i \mathbf{y}_i = 0. \tag{iii}$$

Multiplicando (ii) por λ_n e subtraíndo de (iii) resulta

$$\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \left(\lambda_n - \lambda_i\right) \mathbf{y}_i + \kappa_n \left(\lambda_n - \lambda_n\right) \mathbf{y}_n = 0.$$

Daí, como $\kappa_n (\lambda_n - \lambda_n) \mathbf{y}_n = 0$ então

$$\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i (\lambda_n - \lambda_i) \mathbf{y}_i = 0. \tag{iv}$$

Como, por hipótese $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ então os κ_i de (iv) são todos nulos pela hipótese de indução (i). Assim, de (ii) tem que $\kappa_n \mathbf{y}_n = 0$. Portanto, $\kappa_n = 0$. Logo, (ii) é verdade ■

Observação 10.2 *Em particular, suponha que existam n valores característicos distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (raízes simples, i. é, sem multiplicidade). Então o sistema (10.3) admite essencialmente uma única solução $\boldsymbol{\phi}_i = (\phi_{i1}, \ldots, \phi_{in})$ para cada λ_i e os n vetores $\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_n$ assim definidos são LI.*

Soluções Associadas a Valores Característicos Simples

Mostra-se, a seguir, que o sistema fundamental de soluções do problema (10.1) pode ser obtido desde que as raízes do polinômio característico sejam todas simples, isto é, com multiplicidade 1.

Proposição 10.2 *Seja $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x)$ uma solução de (10.1) para todo $x \in I$. Se para algum valor $\xi \in I = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| \leq a\}$ a função $\boldsymbol{\phi}(\xi)$ é um vetor característico de A associado a λ, i. é,*

$$A\boldsymbol{\phi}(\xi) = \lambda \boldsymbol{\phi}(\xi) \tag{a}$$

então $A\boldsymbol{\phi}(x) = \lambda\boldsymbol{\phi}(x)$ para todo $x \in I$.

Demonstração - Sendo $\boldsymbol{\phi}$ uma solução de (10.1) então pela Observação 10.1 tem-se que a função $\boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{\phi}'(x) - \lambda\boldsymbol{\phi}(x)$ é, também, uma solução de (10.1). Daí e como $\boldsymbol{\phi}'(x) = A\boldsymbol{\phi}(x)$ então

$$\boldsymbol{\psi}(x) = A\boldsymbol{\phi}(x) - \lambda I_n \boldsymbol{\phi}(x) = (A - \lambda I_n)\, \boldsymbol{\phi}(x). \tag{b}$$

Pela hipótese (a) tem-se $\boldsymbol{\psi}(\xi) = (A - \lambda I_n)\, \boldsymbol{\phi}(\xi) = 0$ e como a solução de (10.1) é única então $\boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{\psi}(\xi) = 0$. Daí e de (b) conclui-se que $A\boldsymbol{\phi}(x) = \lambda\boldsymbol{\phi}(x)$ para todo $x \in I$ ■

Com base na Proposição 10.2 define-se: Uma solução $\boldsymbol{\phi}$ de (10.1) é uma solução característica associada a λ para algum $\xi \in I$ se, e somente se, $\boldsymbol{\phi}(\xi)$ satisfaz a condição (a) da Proposição 10.2. Neste caso, $\boldsymbol{\phi}(\xi)$ é um vetor característico associado a λ.

Proposição 10.3 *Para cada valor característico λ de A existe uma solução $\boldsymbol{\phi}$ em I do problema (10.1) dada por*

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \left(\phi_1 e^{\lambda x}, \phi_2 e^{\lambda x}, \ldots, \phi_n e^{\lambda x}\right) \tag{$\star$}$$

onde $(\phi_1, \phi_2, .., \phi_n)$ é um vetor característico de A associado a λ.

Demonstração - Seja $\boldsymbol{\phi}_0 =: (\phi_1(0), \ldots, \phi_n(0)) =: (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ um vetor característico de A associado a λ. Suponha $\boldsymbol{\phi}(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ a solução de (10.1) tal que $\boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\phi}_0$. Assim, pela Proposição 10.2 a função $\boldsymbol{\phi}$ satisfaz $\boldsymbol{\phi}'(x) = A\boldsymbol{\phi}(x) = \lambda\boldsymbol{\phi}(x)$ para todo $x \in I$. Escrevendo esta última equação em termos de suas componentes tem-se

$$\phi_i'(x) = \lambda\phi_i(x) \text{ para todo } x \in I \text{ com } i = 1, \ldots, n.$$

Daí, tem-se que $\phi_i(x) = \phi_i(0)e^{\lambda x}$. Logo, sendo $\boldsymbol{\phi}(0) = \boldsymbol{\phi}_0$ obtém-se $(\star)$ ■

Em suma, provou-se:

Qualquer conjunto de funções características de (10.1) associadas a diferentes valores característicos de A é LI. Se, em particular, a matriz A tem n valores característicos distintos então o correspondente conjunto de soluções características formam um sistema fundamental de soluções de (10.1).

Soluções Associadas a Valores Característicos com Multiplicidade

Agora analisa-se o caso quando os valores característicos de A não são simples. Ou seja, valores característicos com multiplicidade. Para facilitar a escrita adota-se, nesta secção, a seguinte notação:

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, D^k = \frac{d^k}{dx^k}.$$

Pela Observação 10.1, se $\boldsymbol{\phi}$ é uma solução de (10.1) então $D\boldsymbol{\phi}$ é também uma solução de (10.1), e sendo $D\boldsymbol{\phi} = A\boldsymbol{\phi}$ resulta

$$D^2\boldsymbol{\phi} = D\left(D\boldsymbol{\phi}\right) = D\left(A\boldsymbol{\phi}\right) = AD\boldsymbol{\phi} = A^2\boldsymbol{\phi}.$$

Daí mostra-se indutivamente que

$$D^k\boldsymbol{\phi} = A^k\boldsymbol{\phi} \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

De um modo mais geral, se P é um polinômio com coeficientes constantes, obtém-se para qualquer função $\boldsymbol{\phi}$ solução do problema (10.1) que

$$P(D)\boldsymbol{\phi} = P(A)\boldsymbol{\phi}. \tag{10.5}$$

Proposição 10.4 *Seja $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x)$ uma solução de (10.1) em I. Suponha para algum $\xi \in I$ que $\boldsymbol{\phi}(\xi)$ é um vetor característico de A associado a λ e que λ tenha multiplicidade m. Ou seja,*

$$\left(A - \lambda I_n\right)^m \boldsymbol{\phi}(\xi) = 0. \tag{$*$}$$

Então

$$(A - \lambda I_n)^m \boldsymbol{\phi}(x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I. \tag{$**$}$$

Tem-se, de (10.5) e ($**$) que $(D-\lambda)^m \boldsymbol{\phi}(x) = 0$ *para todo* $x \in I$.

Demonstração - Usando a identidade (10.5) segue que

$$(A - \lambda I_n)^m \boldsymbol{\phi}(x) = (D-\lambda)^m \boldsymbol{\phi}(x) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Note que $\boldsymbol{\psi}(x) = (D-\lambda)^m \boldsymbol{\phi}(x)$ é uma combinação linear de $\boldsymbol{\phi}$ e de suas derivadas. Daí e da Observação 10.1 tem-se que $\boldsymbol{\psi}$ é solução de (10.1). Pela hipótese ($*$) segue

$$\boldsymbol{\psi}(\xi) = (D-\lambda)^m \boldsymbol{\phi}(\xi) = 0.$$

Logo, pela unicidade de soluções do problema (10.1) resulta que $\boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{\psi}(\xi) = 0$. Portanto, sendo $(D-\lambda)^m \boldsymbol{\phi}(x) = 0$ tem-se ($**$) ■

Definição 10.1 *Uma solução de (10.1) associada ao valar característico λ de multiplicidade m é dita* **solução primitiva** *se ela é não nula e satisfaz ($**$) da Proposição 10.4.*

Portanto, pela Proposição (10.4) a função $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x)$ é uma solução primitva de (10.1) se, e somente se, existe algum $\xi \in I$ para a qual $\boldsymbol{\phi}(\xi)$ é vetor característico de A associado λ com multiplicidade m. As soluções primitivas de (10.1) podem ser escritas em uma forma bem simples como a seguir.

Proposição 10.5 *Se $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x)$ é uma solução primitva de (10.1) associada ao valor característico λ com multiplicidade m, i. é,*

$$(A - \lambda I_n)^m \boldsymbol{\phi}(x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I.$$

Então

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \Big(P_1(x)e^{\lambda x}, \ldots, P_n(x)e^{\lambda x}\Big) \tag{10.6}$$

onde $P_i(x)$, para $i = 1, \ldots, n$, são polinômios com grau menor ou igual a $m-1$.

Demonstração - Pela Proposição (10.4) tem-se $(D-\lambda)^m \boldsymbol{\phi}(x) = 0$ para todo $x \in I$. Sendo $\boldsymbol{\phi}(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ a identidade precedente na forma escalar, torna-se ([17])

$$(D-\lambda)^m \phi_i(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I \quad \text{com} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{a}$$

Mostra-se, agora, para qualquer função φ com derivadas contínuas de ordem m, que

$$(D-\lambda)^m \Big(e^{\lambda x}\varphi(x)\Big) = e^{\lambda x} D^m \varphi(x) \quad \text{para todo} \quad x \in I, \tag{10.7}$$

[17] Isto significa fazer $\phi_i(x) \equiv (0, \ldots, \phi_i(x), \ldots, 0)$.

onde λ é uma constante qualquer. A prova é feita por indução sobre m. De fato, para $m = 0$ é imediato, pois $e^{\lambda x}\varphi(x) = e^{\lambda x}\varphi(x)$. Assume-se que (10.7) é válida para $m = k - 1$. Ou seja,

$$(D-\lambda)^{k-1}\left(e^{\lambda x}\varphi(x)\right) = e^{\lambda x}D^{k-1}\varphi(x) \quad \text{para todo} \quad x \in I. \tag{b}$$

Então

$$\begin{aligned}
(D-\lambda)^{k}\left(e^{\lambda x}\varphi(x)\right) &= (D-\lambda)\,(D-\lambda)^{k-1}\left(e^{\lambda x}\varphi(x)\right)\\
&\underbrace{=}_{(b)} (D-\lambda)\left(e^{\lambda x}D^{k-1}\varphi(x)\right)\\
&= \lambda e^{\lambda x}D^{k-1}\varphi(x) + e^{\lambda x}D^{k}\varphi(x) - \lambda e^{\lambda x}D^{k-1}\varphi(x)\\
&= e^{\lambda x}D^{k}\varphi(x).
\end{aligned}$$

Logo, (10.7) é válido para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, usando (10.7) e (a) resulta

$$0 = (D-\lambda)^m\,\phi_i(x) = (D-\lambda)^m\left(e^{\lambda x}(e^{-\lambda x}\phi_i(x))\right) = e^{\lambda x}D^m\left(e^{-\lambda x}\phi_i(x)\right).$$

Como $e^{\lambda x} > 0$ para todo x então $D^m\left(e^{-\lambda x}\phi_i(x)\right) = 0$. Integrando, resulta

$$e^{-\lambda x}\phi_i(x) = P_i(x) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n,$$

onde $P_i(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $m - 1$. Logo, tem-se (10.6) ■

Em resumo tem-se:

Um sistema fundamental de soluções de (10.1) na forma (10.6) sempre existe. Além disso, se todos os valores caracerísticos λ_i da matriz A são conhecidos, este sistema fundamental pode ser obtido por um número finito de operações elementares.

Equação Homogênea de Ordem n

Considera-se a EDO de ordem n com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$ constantes dada por

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)}(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I. \tag{10.8}$$

A equação (10.8) pode ser transformada, como visto em lições anteriores, em um sistema de equações lineares de primeira ordem. Como os coeficientes são constantes, é mais simples estudar (10.8) diretamente, pois a equação (10.8) pode ser escrita na forma

$$P(D)y(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I, \tag{10.9}$$

onde $P(D)$ é um polinômio com os coeficientes de (10.8) e grau igual a ordem de (10.8). A equação característica de (10.9) é dada por $P(\lambda) = 0$.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ suas raízes características tais que

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \quad \text{onde} \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = n,$$

e m_i é a multiplicidade de cada λ_i. Nestas condições, aplica-se a mesma fatoração para $P(D)$ e obetém-se de (10.9) que

$$(D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k} y(x) = 0. \tag{10.10}$$

É claro que qualquer função $\phi_i = \phi_i(x)$ definida em I satisfazendo

$$(D - \lambda_i)^{m_i} \phi_i(x) = 0 \tag{10.11}$$

será, também, solução de (10.10). Portanto, basta resolver (10.11). Usando a identidade (10.7) e (10.11) tem-see

$$0 = (D - \lambda_i)^{m_i}\, \phi_i(x) = (D - \lambda_i)^{m_i} \left[e^{\lambda_i x} \left(e^{-\lambda_i x} \phi_i(x) \right) \right] = e^{\lambda_i x} D^{m_i} \left(e^{-\lambda_i x} \phi_i(x) \right),$$

para todo $x \in I$. Daí, tem-se que a solução geral de (10.11) é dada por

$$\phi_i(x) = P_{m_i - 1}(x) e^{\lambda_i x} \quad \text{para todo} \quad x \in I, \tag{10.12}$$

onde P_{m_i-1} é um polinômio. Em particular, se $P_{m_i-1}(x) = x^{j-1}$ com $j = 1, \ldots, m_i$ então as funções

$$\phi_{i,j}(x) = x^{j-1} e^{\lambda_i x} \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, m_i$$

são soluções de (10.8).

Proposição 10.6 *As soluções dadas em (10.12) formam um sistema fundamental de soluções de* (10.8)

Demonstração - Qualquer combinação linear de (10.12) pode ser escrita na forma

$$\sum_{i=1}^{k} P_i(x) e^{\lambda_i x}$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ e P_i são polinômios. Assim, deve-se mostrar que se

$$\sum_{i=1}^{k} P_i(x) e^{\lambda_i x} = 0 \quad \text{então} \quad P_i(x) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k.$$

A demonstração será feita usando o princípio de indução matemática. Para $k = 1$ tem-se que $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$ implica $P_1(x) = 0$ pois $e^{\lambda_1 x} > 0$ para todo x. Suponha que seja verdade para $k = m - 1$ e considera-se

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(x) e^{\lambda_i x} = 0 \quad \text{para} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{e} \quad i \neq j. \tag{$\star$}$$

Dividindo por $e^{\lambda_m x}$ resulta

$$\sum_{i=1}^{m-1} P_i(x)e^{(\lambda_i-\lambda_m)x} + P_m(x) = 0.$$

Derivando obtém-se

$$\sum_{i=1}^{m-1} Q_i(x)e^{(\lambda_i-\lambda_m)x} + P_m'(x) = 0, \tag{a}$$

onde $Q_i(x) = P_i'(x) + (\lambda - \lambda_m)P_i(x)$. Note que os polinômios Q_i têm o mesmo grau dos P_i. Após um número adequado de derivação P_m será nulo. Assim

$$\sum_{i=1}^{m-1} R_i(x)e^{(\lambda_i-\lambda_m)x} = 0 \tag{b}$$

onde os R_i são polinômios com o mesmo grau que os P_i. Como $\lambda_i - \lambda_m$ não são nulos então a hipótese de indução implica que $R_i(x) = 0$ para todo $x \in I$ e $i = 1, \ldots, m-1$. Daí, $P_i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, m-1$. Usando este fato em $(\star)$ tem-se que $P_m(x) = 0$ para todo $x \in I$. Logo,

$$P_i(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in I \quad \text{e} \quad i = 1, \ldots, m \quad \blacksquare$$

Exemplo 10.1 *A equação característica da equação diferencial* $y''+2ky'+w^2y = 0$ *é dada por* $\lambda^2 + 2k\lambda + w^2 = 0$. *Daí, as raízes são*

$$\lambda_1 = k + \sqrt{k^2 - w^2} \quad e \quad \lambda_2 = k - \sqrt{k^2 - w^2}.$$

- *Se* $k^2 > w^2$ *então as raízes* λ_1, λ_2 *são reais e distintas. As soluções associadas são* $\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $\phi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Assim, a solução geral é dada por* $\boldsymbol{\phi}(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$. *Como* $\phi_1(x)/\phi_2(x) = e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$ *não é constante então* ϕ_1, ϕ_2 *são LI. Ou seja, tem-se um sistema fundamental de soluções.*

- *Se* $k^2 < w^2$ *as raízes* λ_1, λ_2 *são complexas. Assim, sendo* $\lambda_{1,2} = k \pm i\beta$ *com* $\beta^2 = w^2 - k^2$ *então a solução geral é do tipo*

$$\boldsymbol{\phi}(x) = e^{-kx}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 sen\,\beta x\right) \quad com \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercícios da Lição 10

Exercício 10.1 *Mostre que, se* $\beta^2 = w^2 - k^2$ *então*

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)} sen\,\beta(x-t) f(t)dt$$

é solução de

$$y'' + 2ky' + w^2y = f(x).$$

Exercício 10.2 ...

Exercício 10.3 ...

Exercício 10.4 ...

Exercício 10.5 ...

Sug.: ...

Lição 11 – Sistemas Autônomos I

Objetivos: Estabelecer uma análise da estabilidade e da instabilidade de pontos críticos de sistemas autônomos.

Introdução

Um sistema físico é dito autonômo quando sua equação diferencial não contém explicitamente a sua variável independente. No caso de sistemas físicos de ordem dois, em geral, a equação de segunda ordem é da forma

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{$*$}$$

onde y é uma função que, por exemplo, pode depender da variável espacial x ou da variável temporal t. Quando a variável é interpretada como tempo é comum referir-se a uma solução ϕ de $(*)$ como estado do sistema $(*)$ no instante t. É, também, mais comum usar ao invés da forma $(*)$ a chamada forma normal

$$y'' = f(y, y'). \tag{$**$}$$

A resolução de $(**)$ pode ser feita, por exemplo, reduzindo-se a ordem como feito de modo similar na Lição 8. Assim, se $y = y(t)$ então fazendo $y' =: v$ tem-se que $v = v(y(t))$ e pela regra da cadeia obtém-se

$$y'' = v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v. \tag{11.1}$$

Assim, $(**)$ é equivalente ao sistema de equações de primeira ordem

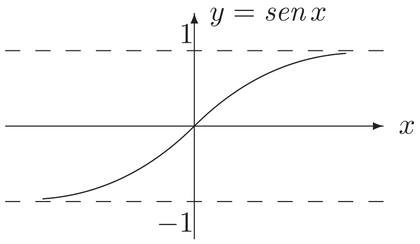
$$\left| \begin{array}{l} y' = v, \\ v' = f(y, v). \end{array} \right.$$

Como a variável independente da função v é y as soluções deste sistema são curvas no plano (em coordenadas cartezianas ortogonais) $y \circ v$. Este plano é chamado de **Plano de Fase**. O nome plano de fase é oriundo da Mecânica significando o plano $y \circ p$ sendo $p = mv$ o momento e m a massa de uma partícula em movimento.

Exemplo 11.1 *Para exemplificar a diferença entre o plano $x \circ y$, onde reside a solução de $(**)$, do plano de fase $y \circ v$ considera-se o problema das oscilações harmônicas de um sistema de vibrações*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \tag{$\star$}$$

onde $y = y(x)$ *e cuja solução é a função* $\phi(x) = \operatorname{sen} x$. *E seu gráfico no plano* $x \circ y$*, como conhecido, é traçado por*



Usando (11.1) em ($\star$) *obtém-se*

$$\frac{dv}{dy}v + y = 0, \quad v(0) = y'(0) = 1.$$

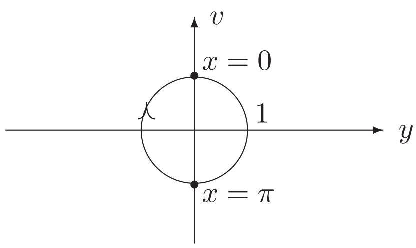
Daí, por separação de variáveis resulta

$$vdv + ydy = 0.$$

Integrando de 0 *a* x *tem-se*

$$\frac{v^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{v^2(0)}{2} + \frac{y^2(0)}{2}.$$

Como $y(0) = 0$ *e* $v(0) = 1$ *então no* plano de fase $y \circ v$ *das oscilações hormônicas é a circunferencia* $v^2 + y^2 = 1$.



Cada x *corresponde um ponto sobre a circunferencia de coordenadas* $(y(x), v(x))$.

Estabilidade e Pontos críticos

Em geral, quando um sistema de equções diferenciais não é linear, é defícil estabelecer sua solução em termo de funções elementares. Assim, o plano de fase é utilizado para indicar o comportamento das soluções de um sistema físico, sem a necessidade de resolvê-lo. Portanto, quanto mais complicado o sistema físico, mais importante se tornará o plano de fase.

Estabilidade - A estabilidade de um sistema significa que pequenas modificações ou perturbações em um sistema físico num dado instante de tempo, implicará em pequenas modificações no desempenho do sistema em todos os instantes futuros. A teoria de estabilidade é, também, usada para investigar o comportamento das soluções de sistema de equações.

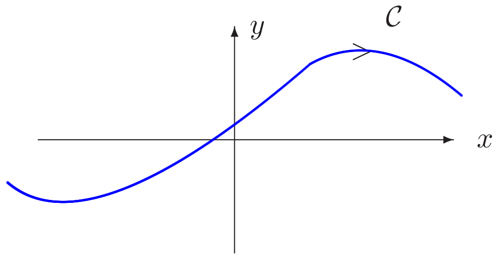
O interesse nesta e nas demais Lições a seguir é discutir sistemas autônomos planos ($n = 2$) da forma

$$\left| \begin{array}{l} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y), \end{array} \right. \tag{11.2}$$

onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções definidas em algum intervalo ou em toda a reta real. A variável independente t não necessariamente significa tempo e as funções F, G são definidas em um domínio $D \subset \mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ \ x,\, y \in \mathbb{R}\}$.

Uma solução de (11.2) é um par de funções $(\phi(t), \psi(t))$ que definem curvas, representadas por $\mathcal{C}$, no plano $\mathbb{R}^2$ ou é um ponto. Neste caso dito degenerado.

As curvas $\mathcal{C}$ são as vezes chamadas de: trajetórias, características, caminhos, etc. As curvas $\mathcal{C}$ serão daqui em diante chamadas de **trajetórias**. O sentido crescente de t é chamado de sentido positivo de $\mathcal{C}$ e pode ser indicado por uma seta conforme a figura:



Uma trajetórias é uma curva definida no $\mathbb{R}^2$, a qual pode ser representada por mais de um par de soluções de (11.2). Ou seja, se $(\phi(t), \psi(t))$ representa uma certa trajetórias $\mathcal{C}$ então para qualquer $t_0 \in I$ o par $(\phi(t - t_0), \psi(t - t_0))$ é uma solução de (11.2) diferente de $(\phi(t), \psi(t))$ e também representa a mesma $\mathcal{C}$.

Portanto, trajetórias e soluções não são sinônimos. Os Exemplos 11.2 e 11.4 tornará esta diferença mais clara.

Inclinação de uma Trajetória

A inclinação de uma trajetória $\mathcal{C}$ ao passar por um ponto (x, y) é definida a partir do sistema (11.2) por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad \text{se} \quad F(x, y) \neq 0. \tag{11.3}$$

A partir de (11.3) há três casos críticos a ser considerados:

1. Quando existe um ponto $(x_0, y_0) \in D$ tal que $F(x_0, y_0) \neq 0$ e $G(x_0, y_0) = 0$ não há, é claro, inclinação de $\mathcal{C}$ com o eixo x.

2. Quando $F(x_0, y_0) = 0$ e $G(x_0, y_0) \neq 0$ trata-se no denominador de um caso limite na vizinhança de (x_0, y_0). Ou seja, $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Assim, tem-se de (11.3) que a tangente à curva $\mathcal{C}$ em (x_0, y_0) é uma reta vertical.

3. Quando $G(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) = 0$. Nada pode ser afirmado sobre a incinação de $\mathcal{C}$. Portanto, demanda cuidados quanto a respeito do comportamento das trajetórias na vizinhança de (x_0, y_0). Este caso será objeto de estudo a seguir.

Definição 11.1 *Um ponto (x_0, y_0) do domínio de F e G tal que*

$$G(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) = 0 \tag{11.4}$$

é chamado de **ponto crítico** *ou* **singularidade** *do sistema (11.2).*

A solução constante de (11.2), isto é $\phi(t) = x_0$ e $\psi(t) = y_0$ para todo t, é uma singularidade do problema (11.2), pois sendo $\phi'(t) = 0$ e $\psi'(t) = 0$ para todo t então o ponto (x_0, y_0) satisfaz (11.4).

Os pontos críticos representam o que se chama **pontos de equilíbrio** dos sistemas físicos. Há diferentes tipos de pontos críticos, os quais dependem do comportamento das trajetórias $\mathcal{C}$ nas proximidades desses ponto de singularidade.

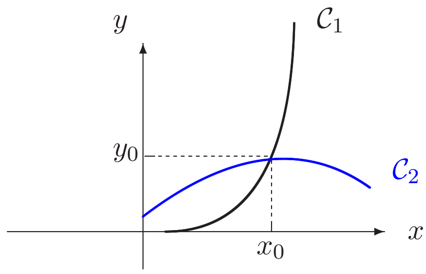
Para facilitar o entendimento geométrico das trajetórias daqui em diante uma solução de (11.2) em I ou em $\mathbb{R}$ será representada por $(x(t), y(t))$, ao invés da notação $(\phi(t), \psi(t))$ como foi utilizada até agora.

Proposição 11.1 *Se F e G são funções de Lipschitz em $D \subset \mathbb{R}^2$ então por um ponto qualquer do domínio D passa no máximo uma trajetória definida pela solução do problema*

$$\left| \begin{array}{ll} x' = F(x, y), & x(t_0) = x_0, \\ y' = G(x, y), & y(t_0) = y_0. \end{array} \right. \tag{a}$$

Demonstração - Mostou-se, de um modo geral, na Lições 8 que, se F e G são funções de Lipschitz em ambas variáveis x e y de $D \subset \mathbb{R}^2$ então o problema de valor inicial (a) tem uma única solução em $I \subset \mathbb{R}$ ou em todo $\mathbb{R}$.

Suponha que há duas trajetórias $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ definidas pelas soluções $(x_1(t), y_1(t))$ e $(x_2(t), y_2(t))$ do problema (a), respectivamente. Seja (x_0, y_0) o ponto pertencente tanto a $\mathcal{C}_1$ quanto a $\mathcal{C}_2$.



Sendo (x_0, y_0) um ponto comum a $\mathcal{C}_1$ e a $\mathcal{C}_2$ então existem t_1, $t_2 \in I$ tais que

$$x_1(t_1) = x_2(t_2) = x_0, \quad y_1(t_1) = y_2(t_2) = y_0. \tag{b}$$

Considere o par de funções

$$(x_1(t + t_1 - t_2),\ y_1(t + t_1 - t_2))\,. \tag{c}$$

Note que o par em (c) é também uma solução de (a), pois F e G não têm explicitamente t. Suponha que o par em (c) também represente $\mathcal{C}_1$. Ora, de (b) e (c) tem-se para $t = t_2$ que

$$x_1(t + t_1 - t_2) = x_2(t), \quad y_1(t + t_1 - t_2) = y_2(t), \tag{d}$$

para todo $t \in I$. Como a solução de (a) é única então as identidades em (d) ocorrem para todo $t \in I$. Como (c) representa $\mathcal{C}_1$ então $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são idênticas ■

A Proposição 11.1 não é verdadeira em geral, isto só ocorre se o sistema for autônomo. Esta proposição assegura que nenhuma trajetória pode cruzar ela mesma. Se existe uma solução tal que

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0 \quad \text{para todo} \quad t \in I, \tag{$*$}$$

tem-se que nenhuma trajetória passa por (x_0, y_0), pois sendo a solução de (11.2) constante a trajetória é um ponto, o qual é chamado de trajetória degenerada.

A condição para que $(*)$ seja uma solução (constante) de (11.2) é que a condição (11.4) seja verificada. E contrariamente, se (11.4) ocorre para um ponto (x_0, y_0) então este ponto é uma singularidade do sistema (11.2).

Singularidade Isolada

Definição 11.2 *Um ponto (x_0, y_0) é uma singularidade isolada de (11.2) se existir um círculo*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2$$

contendo a única singularidade (x_0, y_0).

Chama-se de t_0-característica ou meia-característica ao conjunto dos pontos da característica $\mathcal{C}$ tal que para qualquer representação $(x(t), y(t))$ de $\mathcal{C}$ tem-se $t \geq t_0$ para algum $t_0 \in I$.

Por simplicidade considera-se o ponto crítico (x_0, y_0) como sendo $(0, 0)$. Além disso, supõe-se que existe uma região fechada e limitada $\mathcal{R}$ contendo a t_0-característica e que $(0, 0)$ seja ponto interior de $\mathcal{R}$.

Diz-se que $\mathcal{C}$ se aproxima da singularidade $(0, 0)$ quando

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{11.5}$$

Ou equivalentemente se

$$\lim_{t\to\infty} \left[x^2(t) + y^2(t)\right]^{1/2} = 0.$$

Em outras palavras, o conjunto de todo os pontos de acumulação de $\mathcal{C}$ tem apenas o ponto isolado $(0, 0)$.

Diz-se que $\mathcal{C}$ se afasta da singularidade $(0, 0)$ quando

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \pm\infty.$$

Ou equivalentemente se

$$\lim_{t\to\infty} \left[x^2(t) + y^2(t)\right]^{1/2} = +\infty. \tag{11.6}$$

Definição 11.3 *Um ponto crítico* $(0, 0)$ *do sistema (11.2) é dito* **atrator** *ou (***a singularidade é atrativa***) qundo ocorre (11.5). Ou seja,* $(0, 0)$ *atrai todas as trajetórias de (11.2) em um determinado instante. Quando ocorre (11.6)* **a singularidade não é atrativa***.*

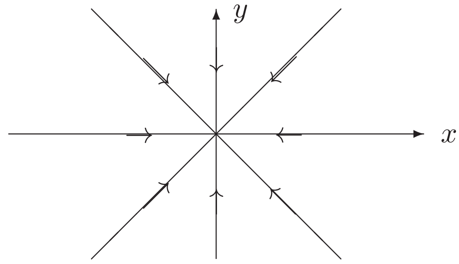
Exemplo 11.2 *Considere o sistema autônomo plano*

$$\left| \begin{array}{l} x' = -x, \\ y' = -y. \end{array} \right.$$

É simples constatar que:

- $(0, 0)$ *é o ponto crítico do sistema;*
- *A solução geral é:* $x(t) = \kappa_1 e^{-t}$; $y(t) = \kappa_2 e^{-t}$;
- $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$;
- *Eliminando* t *na solução acima (*[18]*) tem-se que* $y = (\kappa_2/\kappa_1)x$ *se* $\kappa_1 \neq 0$ *e* $x = (\kappa_1/\kappa_2)y$ *se* $\kappa_2 \neq 0$*. Daí, as trajetórias são "raios" que entram do ponto crítico* $(0, 0)$ *conforme a figura abaixo*

[18] Ou seja, como $e^{-t} = x(t)/\kappa_1$ então substiui este valor em $y(t) = \kappa_2 e^{-t}$.



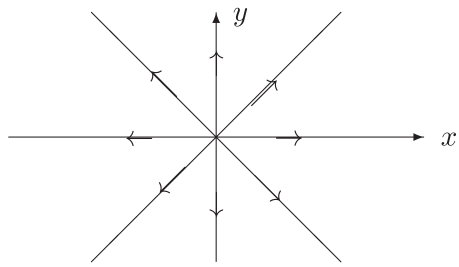
Logo, $(0,0)$ *é um atrator ou uma singularidade isolada e atrativa. Diz-se também, neste caso, que* $(0,0)$ é um nó próprio estável.

Exemplo 11.3 *Considere o sistema autônomo plano*

$$\left| \begin{array}{l} x' = x, \\ y' = y. \end{array} \right.$$

. É, também, simples verificar que:

- $(0,0)$ *é a singularidade deste sistema;*
- *A solução geral é dada por:* $x(t) = \kappa_1 e^t, \;\; y(t) = \kappa_2 e^t$;
- $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$;
- $y = (\kappa_2/\kappa_1)x$ *se* $\kappa_1 \neq 0$ *e* $x = (\kappa_1/\kappa_2)y$ *se* $\kappa_2 \neq 0$. *Daí, vê-se que as trajetórias são "raios" que saem do ponto crítico* $(0,0)$ *conforme a figura a baixo*



Logo, $(0,0)$ *é o ponto crítico é isolado e não atrator. . Diz-se também, neste caso, que* $(0,0)$ é um nó próprio instável.

Singularidades de sistemas autônomos lineares planos

De um modo geral um sistema autônomo linear plano é dado por

$$\left| \begin{array}{l} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{array} \right. \tag{11.7}$$

onde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Observe que o sistema (11.7) é equivalente à equação matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{11.8}$$

O sistema (11.7) pode ser obtido a partir de uma equação de segunda ordem e vice-versa. De fato, derivando $(11.7)_1$ e subtituindo y' pelo seu valor dado em $(11.7)_2$ obtém-se $x'' = ax' + bcx + bdy$. Substituindo y pelo seu valor dado em $(11.7)_1$ encontra-se

$$x'' = ax' + bcx + bd\frac{1}{b}(x' - ax) = (a + d)x' + (bc - ad)x \text{ para } b \neq 0.$$

Assim, as soluções do sistema (11.7) podem ser analisadas em termos das raízes caracteristicas da equação

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

Ou seja, em termos das raízes do polinômio

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc). \tag{11.9}$$

Portanto, a equação característica do sistema (11.7) é dada por (11.9), pois sendo A a matriz quadrada dada em (11.8) então

$$P_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Note que (11.7) tem sigularidade em $(0, 0)$ e se o $\det A = ad - bc \neq 0$ então $\lambda = 0$ não pode ser valor característico de A. Além disso, a singularidade $(0, 0)$ é única.

Na Lição 10 viu-se, de um modo mais geral do que o estudado aqui, como se obtém as soluções do sistema (11.7) a partir das raízes λ_1, λ_2 do polinômio (11.9). Usando a equação característica (11.9) os exemplo 11.2 e 11.4 são analisados como segue.

- No Exemplo 11.2 tem-se que

$$\left| \begin{array}{l} x' = -x, \\ y' = -y. \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim, os valores característicos são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, pois a equação característica é $(-1 - \lambda)^2 = 0$. A singularidade $(0, 0)$ é única, pois

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sendo $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ tem-se as soluções $x(t) = \kappa_1 e^{-t}$ e $y(t) = \kappa_2 e^{-t}$. As trajetórias $\mathcal{C}$ definidas por $\left(\kappa_1 e^{-t}, \kappa_2 e^{-t}\right)$ tendem para a singularidade $(0,0)$ ao longo das retas $y = (\kappa_2/\kappa_1)x$ se $\kappa_1 \neq 0$ e $x = (\kappa_1/\kappa_2)y$ se $\kappa_2 \neq 0$. Logo, a singularidade é estável e atrativo.

- No Exemplo 11.4 tem-se que

$$\left| \begin{array}{l} x' = x, \\ y' = y. \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim, os valores característicos são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, pois a equação característica é $(1-\lambda)^2 = 0$. A singularidade $(0,0)$ é única, pois

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem-se que as soluções $x(t) = \kappa_1 e^{t}$ e $y(t) = \kappa_2 e^{t}$, as quais se afastam da singularidade ao longo das retas $y = (\kappa_2/\kappa_1)x$ se $\kappa_1 \neq 0$ e $x = (\kappa_1/\kappa_2)y$ se $\kappa_2 \neq 0$. Logo, a singularidade é instável.

Exemplo 11.4 *Considere o sistema autônomo plano*

$$\left| \begin{array}{l} x' = -x, \\ y' = -2y. \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim, os valores característicos são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$, pois a equação característica é $(-1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$. Note que $0 > \lambda_1 = -1 > -2 = \lambda_2$. A singularidade $(0,0)$ é única, pois

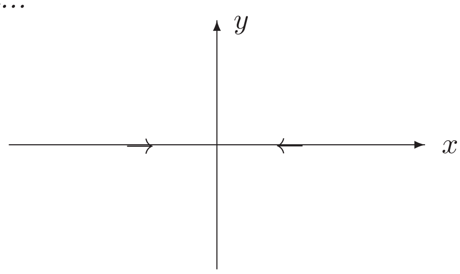
$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Sendo $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ tem-se as soluções $x(t) = \kappa_1 e^{-t}$ e $y(t) = \kappa_2 e^{-2t}$. As trajetórias $\mathcal{C}$ definidas por $\left(\kappa_1 e^{-t}, \kappa_2 e^{-2t}\right)$ tendem para a singularidade $(0,0)$ ao longo das curvas: sendo

$$e^{-t} = \frac{x(t)}{\kappa_1} \quad e \quad y(t) = \kappa_2 e^{-t} \cdot e^{-t} \quad \text{então} \quad y = \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} x^2 \quad \text{com} \quad \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} \in \mathbb{R}.$$

Portanto, as trajetórias se aproximam da singularidade $(0,0)$ ao longo de parábolas, a excessão das retas do sistema de eixos $x \circ y$. Logo, a singularidade é estável e atrativa.

Figura a ser construida...



Exemplo 11.5 *Considere o sistema autônomo plano*

$$\left| \begin{array}{l} x' = x, \\ y' = 2y. \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim, os valores característicos são $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$*, pois a equação característica é* $(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$*. Note que* $0 < \lambda_1 = 1 > 2 = \lambda_2$*. A singularidade* $(0,0)$ *é única, pois*

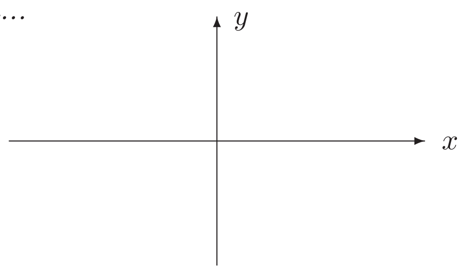
$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Sendo $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$ *tem-se as soluções* $x(t) = \kappa_1 e^t$ *e* $y(t) = \kappa_2 e^{2t}$*. As trajetórias* $\mathcal{C}$ *definidas por* $\left(\kappa_1 e^t, \kappa_2 e^{2t}\right)$ *se afastam da singularidade* $(0,0)$ *ao longo das curvas: sendo*

$$e^t = \frac{x(t)}{\kappa_1} \quad e \quad y(t) = \kappa_2 e^t \cdot e^t \quad \textit{então} \quad y = \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} x^2 \quad \textit{com} \quad \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2} \in \mathbb{R}.$$

Portanto, as trajetórias se afastam da singularidade $(0,0)$ *ao longo de parábolas, a excessão das retas do sistema de eixos* $x \circ y$*. Logo, a singularidade é instável e não atrativa.*

Figura a ser construida...



A noção geométrica dos Exemplos 11.2-11.5 será útil para à analise da natureza do ponto crítico $(0,0)$ do sistema linear plano na forma (geral) dada em (11.7). Este anállise será feito por meio dos valores característicos λ_1 e λ_2.

Considera-se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Portanto, dois valores característicos reais e distintos. O caso quando λ_1 e λ_2 são positivos é similar, pois como visto nos exemplos precedentes, basta trocar $-t$ por t nas soluções.

Sendo $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ então os pares

$$\begin{array}{lll} (x_1(t), y_1(t)) & \text{com} & x_1(t) = Ae^{\lambda_1 t}, \quad y_1(t) = Be^{\lambda_1 t}; \\ (x_2(t), y_2(t)) & \text{com} & x_2(t) = Ce^{\lambda_2 t}, \quad y_2(t) = De^{\lambda_2 t}; \end{array} \qquad \text{(a)}$$

com A, B, C, D constantes tais que o det $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq 0$, são soluções de (11.7) e as trajetórias são retas $x_1 = (A/B)y_1$ e $x_2 = (C/D)y_2$ e se aproximando da singularidade $(0,0)$, pois λ_1 e λ_2 são negativos.

Portanto, um solução mais geral

Exercícios da Lição 11

Exercício 11.1 *Mostre que, ...*

Exercício 11.2 ...

Exercício 11.3 ...

Exercício 11.4 ...

Sug.: ...

Exercício 11.5 ...

Sug.: ...

Lição 12 – Sistemas Autônomos II

Objetivos: Dar continuidade à análise sobre estabilidade e da instabilidade de pontos críticos de sistemas autônomos.

Exercícios da Lição 12

Exercício 12.1 *Mostre que, ...*

Exercício 12.2 *...*

Exercício 12.3 *...*

Exercício 12.4 *...*

Sug.: ...

Exercício 12.5 *...*

Sug.: ...

Bibliografia

[1] Boyce, W. E. & DiPrima, R. C., *Elementary differential equations*, John Wiley & Sons, INc, 7th Ed (2009).

[2] Browder, F. E., *Nonlinear equations of evulution*, Ann. Math., 80, 1964, pag. 485-523.

[3] Coddington, E. A., *An introduction to ordinaty differential equations*, Dover Publications, (1961).

[4] Fleming, W. H., *Functions of Several Variables*, Springer-Verlag (1976).

[5] Hurewicz, W., *Lectures on ordinary differential equations*, The M. I. T. Press, (1958).

[6] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons (1978).

[7] Medeiros, L. A., *Lições sobre a equação diferencial* $x' = f(t, x)$, Monografias XXXII, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF (1971).

[8] Medeiros, L. A. , *On nonlinear differential equations in Hilbert spaces*, American Mathmatical Monthly, Vol. 76, No. 9, November, 1960, pag. 1024-1027.