Vamos começar com uma revisão do conceito de integral para que aplicação faça sentido.

Integral como Soma

Suponha que $f(x)$ seja contínua e não negativa no intervalo $a \leq x \leq b$. Você pode calcular o valor aproximado da área abaixo do gráfico de f, entre $x = a$ e $x = b$, da seguinte maneira: divida o intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = x_{j+1} - x_j$, onde x_j o início do j-ésimo subintervalo. Construa agora n retângulos tais que a base do j-ésimo retângulo seja o subintervalo j-ésimo, e a altura do j-ésimo retângulo seja $f(x_j)$.

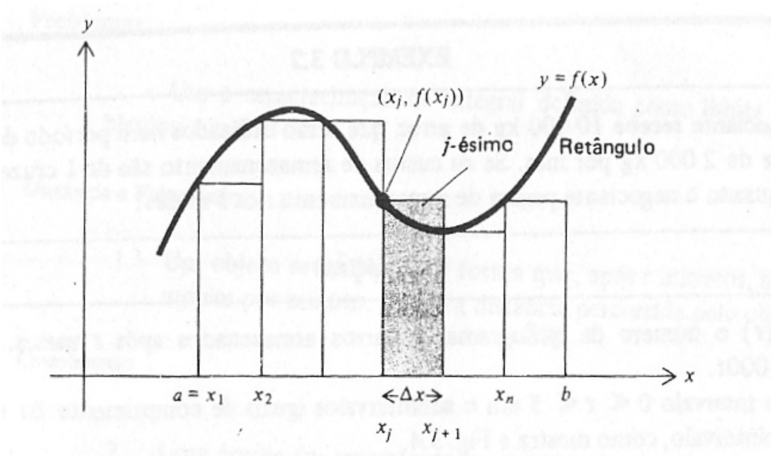


Figure 1: área abaixo do gráfico de $f(x)$

A área do j-ésimo retângulo é $f(x_j)\Delta x$ e é um valor aproximado da área abaixo da curva, entre $x = x_j$ e $x = x_{j+1}$. A soma das áreas de todos os n retângulos é

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

A soma é um valor aproximado da área abaixo da curva, entre $x = a$ e $x = b$, logo, é uma aproximação da integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

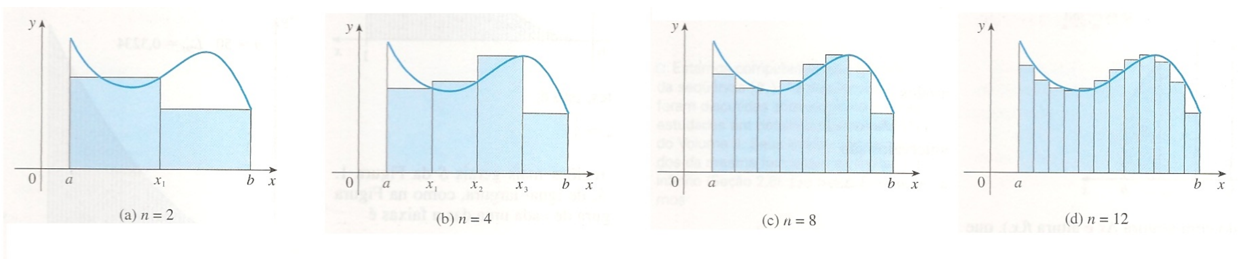


Figure 2: Por fazer o valor de n crescer

Como a figura sugere a soma das áreas dos retângulos tende a área abaixo da curva, quando o número de retângulos cresce indefinidamente, ou seja,

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\, dx$$

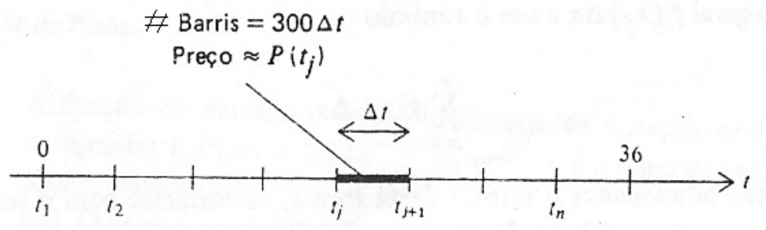
Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos dar uma aplicação desta idéia.

Aplicação

Certo poço de petróleo que fornece 300 barris de petróleo por mês secará em 3 anos. Estima-se que, daqui t meses, o preço do petróleo será $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$ milhares de reais por barril. Sendo petróleo vendido tão logo é extraído do solo, qual será a receita futura do poço?

Solução: Para calcular a receita do período de 36 meses, divida o intervalo $0 \leq t \leq 36$ em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, e seja t_j o primeiro elemento do j-ésimo subintervalo.



Durante cada subintervalo, são produzidos $300\Delta t$ barris de petróleo. Entretanto, sendo Δt pequeno, o preço do petróleo durante o j-ésimo intervalo de tempo pode ser tomado aproximadamente por $P(t_j)$, preço este que esta vigorando desde o início do subintervalo. Então,

$$\text{Receita do j-ésimo subintervalo} \approx 300P(t_j)\Delta t$$

e

$$\text{Receita Total} \approx \sum_{j=1}^{n} 300P(t_j)\Delta t.$$

Quando $n \rightarrow$ cresce, o comprimento Δt diminui e

$$\sum_{j=1}^{n} 300P(t_j)\Delta t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \text{ Receita Total},$$

mas

$$\sum_{j=1}^{n} 300P(t_j)\Delta t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{36} 300P(t)\, dt.$$

Então temos que,

$$\begin{aligned}
\text{Receita Total } &= \int_0^{36} 300P(t)\, dt = 300 \int_0^{36} 18 + 0,3\sqrt{t}\, dt \\
&= 300 \left[18t + 0,2t^{3/2}\right]_0^{36} \\
&= 207360 \text{ milhões de Reais.}
\end{aligned}$$

Questão 1: Em cada um dos casos abaixo use a integral para obter a área da região:

a) A área determinada pelo triângulo limitado pela reta $y = 4 - 3x$ e pelos eixos coordenados.

b) O triângulo determinado pelos vértices $(-4, 0), (2, 0)$ e $(2, 6)$.

c) Região delimitada pela curva $y = -x^2 - 6x - 5$ e o eixo do x.

d) Região limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 1 - x^2$ entre $x = -2$ e $x = 1$.

e) Região limitada pelas curvas $y = e^x$ e as retas $y = 1$ e $x = 1$.

Questão 2: Quanto uma máquina que tem x anos de uso, gera uma receita de $R(x) = 6025 - 10x^2$ de milhares de reais por ano e custo de $C(x) = 4000 + 15x^2$ milhares de reais por ano.
(a) Durante quantos anos o uso da máquina é lucrativa?
(b) Qual a receita liquida total gerada pela máquina durante o período de tempo do item (a)?

Questão 3: Calcule a área limitada pelas curvas $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$ entre $x = -1$ e $x = 2$.

Questão 4: Você possui uma quantia de dinheiro para aplicar em um plano de investido escolhido entre dois planos concorrentes. Após x anos, o primeiro plano produzirá uma renda de $R_1(x) = 50+3x^3$ milhares de Reais por ano, enquanto que o segundo produzirá a renda constante de $R_2(x) = 200$ milhares de reais por ano.
(a) Se utilizar o segundo plano, que renda você receberá a mais do que se utilizasse o primeiro, após 5 anos?
(b) Interprete a sua resposta no item (a) como área entre curvas.

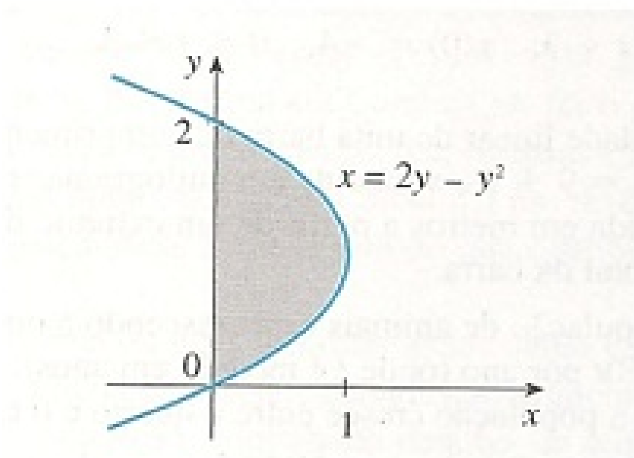
Questão 5: Após x horas de trabalho, um operário produz $Q_1(x) = 60 - 2(x-1)^2$ unidades a hora, enquanto outro produz $Q_2(x) = 50 - 5x$ unidades por hora.
(a) Se ambos chegam a fábrica às 8 horas da manhã, quantas unidades o primeiro operário terá produzido a mais que o segundo, ao meio dia?
(b) Interprete a sua resposta no item (a) como área entre duas curvas.

Questão 6: Calcule, se existir, a integral

a) $\int_1^2 8x^3 + 3x^2\,dx$ **b)** $\int_0^1 (1-x)^9\,dx$

c) $\int_1^4 \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int_1^8 \sqrt[3]{x}(x-1)\,dx$.

Questão 7: Calcule a área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$.



Questão 8: Um objeto se move de tal forma que, após t minutos, sua velocidade é de $v(t) = 1+4t+3t^2$ metros por minutos. Qual a diferença percorrida pelo objeto durante o terceiro minuto?

Questão 9: Um comerciante estima que, daqui x meses, os consumidores comprarão $f(x) = 5000 +$

$60\sqrt{x}$ unidades por mês, ao preço de $P(x) = 80 + \sqrt{x}$ reais por unidade. Qual será a receita total do comerciante com a venda do produto nos próximos 16 meses?

Questão 10: O dono de um restaurante recebeu 12000 refrigerantes, que serão usados a uma taxa constante de 300 por semana. Se o custo de refrigeração é de $R\$0,002$ por garrafa por semana, quanto o dono do restaurante gastará em refrigeração nas próximas 40 semanas?

Questão 11: Encontre a integral de:

a) $\int x^3 - 2x + 3\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

c) $\int x + e^{3x}\,dx$ **d)** $\int \frac{5x}{1+3x^2}\,dx$

e) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ **f)** $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Questão 12: Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.

Questão 13: Calcule a área entre os gráficos de $y_A = 2x - x^2$ e $y_B = x^2$.

Questão 14: Calcule as seguintes integrais:

a) $\int x\,dx$ **b)** $\int x^2 + x + 1\,dx$

c) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ **d)** $\int x + \frac{1}{x^4}\,dx$

e) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ **f)** $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$

Questão 15: Calcule as seguintes integrais fazendo a substituição adequada:

a) $\int e^{2x}\,dx$ **b)** $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int (4x+2)e^{x^2+x}\,dx$ **d)** $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$

e) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ **f)** $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}\,dx$

g) $\int x^2 e^x\,dx$ **h)** $\int x(\ln x)^2\,dx$