Portanto nos casos em que $(1 \div 25) < x_I$, $I[p(f(a,b),x)] = T$ o que contradiz a afirmação $I[p(f(a,b),x) = F$. Portanto, $I[E] = T$. Nos casos em que $(1 \div 25) \geq x_I$, $I[E] = F$.

Observação. Não existe uma padronização da definição da semântica na Lógica de Predicados. Freqüentemente, é definida uma estrutura na qual as variáveis são interpretadas separadamente dos outros objetos que compõem as fórmulas como pode ser visto em [Enderton, 1972] e [Shoenfield, 1967]. Este enfoque é diferente deste considerado neste livro, onde os objetos que compõem as fórmulas são interpretados pela mesma estrutura denominada interpretação. Entretanto, mesmo não havendo padronização das definições, todas são equivalentes e têm como fundamento as formalizações de Tarski, que tratam de satisfatibilidade e verdade.

Exercícios

1) Seja I uma interpretação sobre os números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 1$, $I[x] = 1$, $I[p] = <$, $I[f] = f_I$ onde $f_I(d) = d + 1$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é par. Além disso, o valor de $I[y]$ é desconhecido.

   Seja J uma interpretação sobre os números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que:

   $J[a] = 0$, $J[x] = -1$, $J[y] = 0$, $J[p] = <$ e $J[f] = f_J$ onde $f_J(d) = d + 1$.

   Determine, quando for possível, as interpretações das fórmulas a seguir conforme I e J.

   a) $p(x,a)$
   b) $p(x,a) \wedge p(x,f(x))$
   c) $(\exists y)p(y,x)$
   d) $(\forall y)(p(y,a) \vee p(f(y),y))$
   e) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$
   f) $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$
   g) $(\forall x)(\exists x)q(x)$
   h) $(\exists x)(\forall x)q(x)$

2) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 5$, $I[b] = 3$, $I[x] = 7$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I < 9$, $I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I > 4$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I = 7$.

   Determine o resultado da interpretação de cada uma das fórmulas a seguir segundo I.

   a) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$
   b) $(\forall x)(p(x) \rightarrow (\forall z)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$
   c) $((\forall x)p(x) \vee (\forall z)(\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee (\exists x)r(x))$
   d) $(\exists z)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
   e) $(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \vee (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))$
   f) $(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$
   g) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(b))$
   h) $((\exists x)p(x) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow r(b))$

3) Sejam H e G as duas fórmulas a seguir. Nestas fórmulas $x_1, \ldots, x_8$ são as únicas variáveis que ocorrem em $H_1, \ldots, H_8$ respectivamente. Demonstre que se $I[H] = F$, então $I[G] = F$.

$H = (\exists x_1)H_1 \rightarrow ((\exists x_2)H_2 \rightarrow ((\exists x_3)H_3 \rightarrow ((\exists x_4)H_4 \rightarrow ((\exists x_5)H_5 \rightarrow ((\exists x_6)H_6 \rightarrow ((\exists x_7)H_7 \rightarrow ((\exists x_8)H_8)))))))$

$G = (\forall *)((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \wedge H_6 \wedge H_7) \rightarrow H_8)$

4) Sejam I e J as interpretações sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tais que:

$I[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I > z_I + w_I$, $I[z] = 5$, $I[a] = 2$, $I[b] = 7$, $I[w] = 9$,
$J[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I < z_I + w_I$, $J[z] = 5$, $J[a] = 2$, $J[b] = 7$, $J[w] = 9$, $J[y] = 8$
Considere a fórmula $E = (\forall)(\exists y)p(x,y,z,w) \rightarrow (\forall z)\ p(z,b,y,x)$

a) Caso seja possível, determine $I[E]$ e $J[E]$. Justifique sua resposta.
b) No caso em que não é possível determinar o resultado da interpretação, defina uma extensão da interpretação a partir da qual é possível determinar o resultado pretendido.

5) Se possível, determine interpretações que interpretam as fórmulas a seguir como verdadeiras e como falsas. Justifique suas respostas.
a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)$
b) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$
c) $(\forall x)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\exists y)q(z)$

6) a) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, tal que:
$I[a] = 0$, $I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número primo, $I[r] =$ "=" (r é interpretado como a igualdade) e $I[f] = *$ (f é interpretada como o produto).
$H_1 = (\forall x)(\exists y)(q(x,y) \wedge p(y))$
$H_2 = (\forall x)(q(a,x) \rightarrow (\exists z)r(f(z,z),x))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)(\neg r(x,a) \rightarrow (\exists z)r(f(x,z),y))$

b) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o domínio U dos alunos de Ciências da Computação, tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ morreu de AIDS e
$H_1 = (\exists y)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$
$H_2 = (\exists x)(\forall x)\neg p(x,y)$
$H_3 = (\forall *)(p(x,y) \rightarrow (p(y,z) \rightarrow (p(z,w) \rightarrow q(w))))$

c) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número par, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número ímpar,
$I[f(x,y)] = x_I + y_I$ e
$H_1 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge p(y)) \rightarrow p(f(x,y))$
$H_2 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow q(f(x,y))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow p(f(x,y))$

d) Qual o resultado informal da interpretação de H onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I = y_I$, $I[f] = +$, $I[a] = 1$.
$H = (\forall x)(\exists y)(p(x,f(y,y)) \vee p(x,f(f(y,y),a)))$

7) Utilize as regras semânticas para quantificadores e desenvolva as afirmações a seguir:
a) $I[(\forall x)(\forall y)H] = T$.
b) $I[(\forall x)(\forall y)H] = F$.
c) $I[(\forall x)(\exists y)H] = T$
d) $I[(\forall x)(\exists y)H] = F$.
e) $I[(\exists x)(\forall y)H] = T$
f) $I[(\exists x)(\forall y)H] = F$

8) Sejam I e J duas interpretações sobre os naturais $\mathbb{N}$, tais que
$I[p] = J[p] = \leq$, $I[y] = J[y] = 4$, $I[x] = 0$, $J[x] = 9$. Demonstre que:
a) $I[p(x,y)] \neq J[p(x,y)]$

b) $I[(\forall x)p(x,y)] = J[(\forall x)p(x,y)]$
c) $I[(\forall y)p(x,y)] \neq J[(\forall y)p(x,y)]$

9) Traduza as sentenças a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados.
a) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.
b) Todo homem prefere as mulheres bonitas, inteligentes e sensíveis, como Rosa. É por isso que o professor Sérgio prefere sua amada Rosa.
c) As filhas do professor Pedro são lindas e meigas.
d) As filhas do professor Ilmério são lindas e inteligentes e todos os rapazes da Computação querem namorá-las.
e) Nem todo pássaro voa.
f) Todo político é desonesto.
g) Se toda panela tem seu "terço", toda pessoa tem seu amado (obs. esta é uma expressão nordestina).
h) Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas.
i) Se existe um barbeiro na cidade que não barbeia a quem se barbeia a si próprio, então não existe ninguém para barbear o barbeiro.
j) Não existe conjunto que contém a si próprio.
k) Todo macaco tem seu galho.
l) Toda pessoa que com ferro fere com ferro será ferida.
m) De nada vale a vida de um homem que vive a vida envolvida na vida de uma mulher da vida.
n) Quem não se ama não ama ninguém.
o) Toda Patricinha de Uberlândia, que vai ao shopping tem celular, pele lisa e cheiro de alface.
p) Patricinha de Uberlândia não gosta de Patricinha de Uberaba.
q) Nenhuma Patricinha no shopping usa tênis kichute.
r) Todo irmão do pai de Pedro é seu tio.
s) Pedro tem um tio que é mais novo que seu irmão e mora em Israel.
t) Jamil admira a irmã do cunhado de seu tio, que mora no Líbano.
u) Rispoli admira o neto de seu neto, mas nem conhece o neto de seu filho.
v) Os irmãos de Cláudio são gaúchos e torcem pelo Grêmio como ele.
w) Faina e Cláudio são amigos. Mas nem todo amigo de Faina é amigo de Cláudio e vice-versa.
x) Autran é um bom pai e ama todos os seus filhos.
y) Os filhos de Ana são os filhos de Nicolau. Ana ama seus filhos. Márcio é filho de Nicolau. Portanto, Ana ama Márcio.

10) Caso seja possível, escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica de Predicados. Na impossibilidade, justifique. Observe que este exercício foi proposto no contexto da Lógica Proposicional.
a) Todo homem é mortal.
b) Possivelmente, irei ao cinema.
c) Fui gordo, hoje sou magro.
d) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.
e) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.
f) Existe aluno de Ciência da computação que é detestado por seus colegas.
g) Necessariamente algum político é desonesto.
h) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.

i) Quase todo político é desonesto.
j) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.
k) Toda regra tem exceção.
l) Quase todo funcionário da Algar é um talento.
m) Poucos funcionários da Algar não são empreendedores.
n) O presidente da Algar é admirado por seus colaboradores.

11) Demonstre que a segunda forma do princípio da indução implica no princípio da indução na Lógica de Predicados.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2) A solução deste exercício segue um padrão. Dada uma fórmula H, suponha que $I[H] = T$ ou $I[H] = F$. A escolha entre estas duas opções depende dos conectivos envolvidos. Se H é do tipo $A \rightarrow B$, considere $I[H] = F$, pois neste caso necessariamente $I[A] = T$ e $I[B] = F$. Se $H = A \vee B$, então considere $I[H] = F$. Logo, $I[A] = F$ e $I[B] = F$. Se H é do tipo $A \leftrightarrow B$, a princípio, sem uma análise das fórmulas A e B, não é possível preterir uma das suposições $I[H] = T$ ou $I[H] = F$. Em qualquer dos casos são deduzidas duas possibilidades para $I[A]$ e $I[B]$. Após a suposição $I[H] = T$ ou $I[H] = F$, as definições são aplicadas. Se for obtido um absurdo, o valor de $I[H]$ é o oposto daquele suposto inicialmente. Quando não se obtém absurdo, é possível interpretar H conforme a suposição inicial.

e) Suponha $I[(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))] = F$

$\Leftrightarrow I[(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a))] = F$ e $I[p(x) \rightarrow (\forall x)p(b)] = F$

$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; <x \leftarrow d_1>I[(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)] = F$ e $I[p(x)] = T$ e $I[(\forall x)p(b)] = F$

$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; <x \leftarrow d_1>I[p(x)]=T$ e $<x \leftarrow d_1>I[(\exists x)p(a)] = F$ e $I[p(x)] = T$ e $I[(\forall x)p(b)] = F$

$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; <x \leftarrow d_1>I[p(x)]=T$ e $\forall\, d_2 \in D;$ $<x \leftarrow d_2><x \leftarrow d_1>I[p(a)] = F$ e $I[p(x)] = T$ e $\exists\, d_3 \in D; <x \leftarrow d_3>I[p(b)] = F$

$\Leftrightarrow \exists\, d_1 \in D; p_I(d_1)=T$ e $p_I(a_I) = F$ e $p_I(x_I) = T$ e $p_I(b_I)] = F$

Como $I[a] = a_I = 5$, tem-se $p_I(a_I) = T$. Portanto, a última afirmação é falsa. Logo, $I[(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))] = T$

3) Observe que H implica $G \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$ é tautologia. Demonstre supondo por absurdo que $(H \rightarrow G)$ não é tautologia. Observe também que $G = (\forall x_1)...(\forall x_8)((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \wedge H_6 \wedge H_7) \rightarrow H_8)$

4) a) É possível determinar $I[E]$ se é conhecido o valor de I nas variáveis livres de H. O mesmo ocorre para $J[E]$.

5) a) Sejam I e J duas interpretações sobre os naturais tais que
$I[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow (x_I+y_I)>z_I$, $I[z]=5$, $I[x]=5$,
$J[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow (y_J+z_J)\leq x_J$, $J[z]=0$, $J[x]=5$.
Neste caso, $I[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z)]=T$ e $I[(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$. Logo, $I[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$.
Por outro lado, $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z)]=T$ e $J[(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$.
Logo, $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)]=F$. Demonstre, utilizando as definições, cada uma das igualdades.

6) a) $I[H_1]$= dado um número real qualquer, existe outro menor que é ímpar.

$I[H_2]$= dado um número real qualquer, se ele é positivo então existe outro que é igual a sua raiz quadrada.

$I[H_3]$= dados dois números reais x e y, se x é diferente de zero, então é possível dividir y por x.

b) $I[H_1]$= se existe o "bem amado" no curso de computação, então todo aluno de computação é amado por alguém.

$I[H_2]$= existe um aluno de computação que não gosta de nenhum outro.

$I[H_3]$= dados quatro alunos de computação quaisquer, x, y, z, w, se x ama y e y ama z e z ama w, então w vai morrer de AIDS.

c) $I[H_1]$= dados dois números naturais quaisquer, que são pares, sua soma também é par.

$I[H_2]$= dados dois números naturais quaisquer, um par e outro ímpar, então sua soma é ímpar.

$I[H_3]$= dados dois números naturais quaisquer, que são ímpares, sua soma é par.

d) $I[H]$ = todo número natural é par ou ímpar.

7) a) $I[(\forall x)(\forall y)H] = T \Leftrightarrow \forall\, d_1 \in D, \forall\, d_2 \in D, \langle y \leftarrow d_2 \rangle \langle x \leftarrow d_1 \rangle I[H]=T$. Observe que as extensões estão na ordem inversa dos quantificadores.

8) Demonstre que:

a) $I[p(x, y)]=T, J[p(x, y)]=F$

b) $I[(\forall x)p(x, y)]=F, J[(\forall x)p(x, y)]=F$

c) $I[(\forall y)p(x, y)]=T, J[(\forall y)p(x, y)]=F$

9) a) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é produtivo, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações. A tradução da sentença na Lógica de Predicados é

$(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$

c) Seja I uma interpretação cujo domínio é formado pelas filhas do professor Pedro. Suponha que $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é linda e meiga. A tradução da sentença é dada por $(\forall x)p(x)$. Suponha uma interpretação J sobre o domínio das pessoas tal que $J[a]$ = Pedro, $J[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é filha de y_I, $J[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é linda, $J[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é meiga. Neste caso a sentença é traduzida em $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (q(x) \wedge r(x)))$. Observe que a tradução de uma sentença não é única e depende do domínio da interpretação.

i) Seja I uma interpretação sobre o conjunto de pessoas da cidade. Suponha $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é barbeiro, $I[q(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ barbeia y_I. A tradução da sentença é

$(\exists x)((p(x) \wedge (\forall y)(q(y,y) \rightarrow \neg q(x,y)) \rightarrow \neg(\exists z)q(z,x)))$

j) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos conjuntos. Suponha $I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ contém y_I. A sentença é traduzida em $(\forall x) \neg p(x,x)$.

10) Desconsiderando representações triviais, tem-se:

b) Não é possível representar, pois "possivelmente" é considerado apenas na Lógica Modal

c) Não é possível representar, pois o "tempo" não é considerado na Lógica de Predicados clássica.

g) Não é possível representar, pois "necessariamente" é considerado apenas na Lógica Modal.

l) Não é possível representar, pois a quantificação "quase tudo" não é considerada na Lógica de Predicados clássica.

m) Não é possível representar, pois a quantificação "pouco" não é considerada na Lógica de Predicados clássica.