Lista 11

Exercícios

1) Demonstre que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes.
   a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$
   b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$
   c) $H = \neg(\exists y)H$, $G = (\forall y)\neg H$
   d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$
   e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$
   f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x)$, $G = (\forall x)p(x)$
2) Demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.
   a) $H = (\forall x)p(x) \to p(a)$
   b) $H = p(a) \to (\exists x)p(x)$
3) Demonstre que a fórmula $H = (\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \to (\neg(\forall y)q(y,y))$ não é uma tautologia.
4) Algumas das fórmulas a seguir são tautologias, outras não. Para cada fórmula demonstre se ela é uma tautologia ou defina uma interpretação que a interprete como sendo falsa.
   a) $p(x) \to (\forall x)p(x)$
   b) $(\forall x)p(x) \to (\exists x)p(x)$
   c) $(\exists x)(p(x) \to q(x)) \to ((\exists x)p(x) \to (\exists x)q(x))$
   d) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists y)p(y,y)$
   e) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists y)p(y,y)$
   f) $(\exists x)(p(x) \to r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)r(x))$
   g) $(\forall x)(p(x) \lor r(x)) \to ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x))$
   h) $((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor r(x))$
   I) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
   j) $(\exists x)((p(x) \to p(a)) \land (p(x) \to p(b)))$
   k) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \land q(y,x)) \to (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$
   l) $(\forall x)(p(x) \land q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \to \neg q(x))$
   m) $(\forall x)(p(x,a) \to (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,b) \to (\forall x)q(x,a))$
   n) $(\forall x)(p(x,a) \to (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \to (\forall x)q(x,b))$
   o) $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \to (\forall x)q(x))$
   p) $(\forall y)p(y) \to (\forall x)p(x)$
   q) $(\exists x)p(x) \to p(x)$
   r) $(\forall x)p(x) \to p(x)$
   s) $p(x) \to (\exists x)p(x)$
5) Considere a fórmula
   $E = (\forall x)(H \to G) \leftrightarrow (\exists x)(H \to G)$.
   Responda se as questões a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas como se segue: Se a questão é verdadeira, então demonstre-a, caso contrário, dê um contra-exemplo.
   a) É possível definir duas fórmulas H e G tais que E é uma tautologia?
   b) É possível definir duas fórmulas H e G tais que E não é uma tautologia?

6) Seja E uma fórmula na qual a variável x não ocorre livre. Dada uma interpretação I sobre U, demonstre que $\forall$ d $\in$ U, $<x \leftarrow d>I[E] = I[E]$
Sugestão: Utilize o princípio da indução na Lógica de Predicados.

7) Seja G uma fórmula na qual a variável x *não* ocorre livre. Demonstre que os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.
   a) $(\forall x)G$ e G
   b) $(\exists x)G$ e G
   c) $(\forall x)(H \land G)$ e $((\forall x)H \land G)$
   d) $(\exists x)(H \land G)$ e $((\exists x)H \land G)$
   e) $(\forall x)(H \lor G)$ e $((\forall x)H \lor G)$
   f) $(\exists x)(H \lor G)$ e $((\exists x)H \lor G)$
   g) $(\forall x)(H \rightarrow G)$ e $((\exists x)H \rightarrow G)$
   h) $(\forall x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\forall x)H)$
   I) $(\exists x)(H \rightarrow G)$ e $((\forall x)H \rightarrow G)$
   j) $(\exists x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\exists x)H)$

8) Sejam H e G duas fórmulas. Demonstre que:
   a) Se $E_1 = (\forall x)(H \land G)$ e $E_2 = (\forall x)H \land (\forall x)G$, então E_1 equivale a E_2.
   b) Se $E_1 = (\forall x)(H \lor G)$ e $E_2 = (\forall x)H \lor (\forall x)G$ então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
   c) Se $E_1 = (\exists x)(H \lor G)$ e $E_2 = (\exists x)H \lor (\exists x)G$ então E_1 equivale a E_2.
   d) Se $E_1 = (\exists x)(H \rightarrow G)$ e $E_2 = (\forall x)H \rightarrow (\exists x)G$, então E_1 equivale a E_2.
   e) Se $E_1 = (\forall x)(H \rightarrow G)$ e $E_2 = (\exists x)H \rightarrow (\forall x)G$, então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
   f) Considere as fórmulas. $E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, $E_2 = (\forall x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$
   Demonstre se for verdadeiro e dê contra-exemplo se for falso.
   I) E_1 implica E_2
   j) E_2 implica E_1

9) Demonstre que:
   a) $\forall d \in D <x \leftarrow d>I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$
   b) $\forall d \in D <x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x,y)] = I[(\forall x)p(x,y)]$
   c) $\forall d \in D <x \leftarrow d>I[q(y)] = I[q(y)]$

10) a) Considere a fórmula $H = p(x) \land \neg(\forall x)p(x)$.
   Demonstre que H é satisfatível e $(\forall^*)H$ é contraditória.
   b) Defina uma fórmula G tal que G não é tautologia, mas $(\exists^*)G$ é uma tautologia.

11) a) Considere as fórmulas $H = (\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)$ e $H_s = (\forall x)\, p(x,g(x),f(x))$, onde f e g são funções quaisquer, mas diferentes entre si. Demonstre que H é insatisfatível $\Leftrightarrow$ H_s é insatisfatível.
   b) Generalize este resultado.

12) a) Defina uma fórmula H tal que H é factível e $(\exists^*)H$ é uma tautologia.
   b) Defina uma fórmula G tal que G é factível e $(\exists^*)G$ não é tautologia.
   c) Responda, justificando sua resposta, se a afirmação a seguir é verdadeira ou não? "Dado uma fórmula H, então H é satisfatível se e somente se $(\exists^*)H$ é válida.

13) Sejam H e G duas fórmulas. Demonstre que:
   a) $\neg(\forall^*)H$ equivale a $(\exists^*)\neg H$
   b) $\neg(\exists^*)H$ equivale a $(\forall^*)\neg H$
   c) $(\forall^*)H$ é tautologia $\Leftrightarrow$ H é tautologia.

d) $(\exists^*)H$ é satisfatível $\Leftrightarrow$ H é satisfatível.
e) H implica G $\Leftrightarrow (\forall^*)(H \rightarrow G)$ é tautologia.
f) H equivale a G $\Leftrightarrow (\forall^*)(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.

14) Responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.
a) $(\exists^*)H$ é tautologia $\Rightarrow$ H é tautologia.
b) H é tautologia $\Rightarrow (\exists^*)H$ é tautologia.
c) H é satisfatível $\Rightarrow (\exists^*)H$ é satisfatível.
d) $(\forall^*)H$ é satisfatível $\Rightarrow$ H é satisfatível.

15) a) Dê exemplo de uma fórmula que contenha variável livre e seja uma tautologia.
b) Dê exemplo de uma fórmula sem variáveis e símbolos de verdade e que seja uma tautologia.
c) Existe fórmula que não é tautologia, mas cujo fecho universal é uma tautologia.
d) Existe fórmula que é tautologia, mas que o fecho universal não é uma tautologia?

16) a) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir são satisfeitas:
i) $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$.
ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 3$ e $J[H] = F$.
b) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir são satisfeitas:
i) $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$ ou $|U| = 3$.
ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 4$ e $J[H] = F$.
c) Generalize os resultados dos itens a) e b).

17) Determine se os conjuntos de fórmulas a seguir são satisfatíveis.
a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))\}$
b) $\{(\exists x)(\forall y)p(x,y), (\forall x)(\exists y)p(x,y)\}$
c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(x,y)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z))\}$
d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\exists x)(\exists y)(p(x,y) \wedge \neg p(y,x))\}$

18) Determine se as asserções a seguir são válidas.
a) Todo político é "esperto". Nenhum cientista é "esperto". Portanto, nenhum cientista é político.
b) Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.
c) Todo político é "esperto". Existe indivíduo "esperto", que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.
d) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.
e) Se existe um barbeiro em Coromandel que não barbeia a quem barbeia a si próprio, então não existe ninguém para barbear o barbeiro.
f) Todo aluno de Ciência da Computação é mais inteligente que algum aluno de Engenharia. Logo, não existe aluno de Engenharia, que é mais inteligente que todos os alunos de Ciência da Computação.
g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa, portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.
h) Se há fé há amor. Se há amor há paz. Se há paz há Deus. Se há Deus, nada faltará.
I) Quem não se ama, não ama ninguém.
g) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

19) Considere as afirmações a seguir.

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.

Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas?

a) H_1 implica H_2.

b) H_2 implica H_1.

20) Considere uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que.

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é estudante

$I[p_1(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é monitor

$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é artista

$I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é inteligente

$I[r_1(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é comunicativo

Traduza a sentença a seguir para a lógica de predicados.

Há monitor que é inteligente, mas não é comunicativo.

Apenas estudantes inteligentes são monitores.

Todo artista é comunicativo.

Portanto, nem todo estudante inteligente é um artista.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Todos os itens têm soluções que seguem o padrão da solução do item a).

a) H equivale a G $\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[H] = I[G]. Mas $I[H]=I[G] \Leftrightarrow \{I[H]=T \Leftrightarrow I[G]=T\}$.

$I[H]=T \Leftrightarrow I[(\forall x)(\forall y)p(x,y,z)] \Leftrightarrow \forall d_1 \in D, \forall d_2 \in D,$
$<y \leftarrow d_2><x \leftarrow d_1>I[p(x,y,z)]=T.$

Como $x \neq y$, $<y \leftarrow d_2><x \leftarrow d_1>I[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow <x \leftarrow d_1><y \leftarrow d_2>I[p(x,y,z)]=T$
Portanto,

$I[H]=T \Leftrightarrow \forall d_1 \in D, \forall d_2 \in D, <x \leftarrow d_1><y \leftarrow d_2>I[p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow$
$I[(\forall y)(\forall x)p(x,y,z)]=T \Leftrightarrow I[G]=T$

2) b) Suponha que existe interpretação I tal que I[H]=F. Mas $I[H]=F \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)]=T$ e
$I[p(a)]=F$

$\Leftrightarrow \forall d \in D <x \leftarrow d>I[p(x)]=T$ e $p_I(a_I)=F \Leftrightarrow \forall d \in D\ p_I(x_I)]=T$ e $p_I(a_I)=F$. A última afirmação é um absurdo. Portanto, H é uma tautologia.

3) Defina uma interpretação I sobre D = {i, j, k, m} tal que I[H]=F. Neste caso, I[q(x,y)] é definido utilizando um diagrama que contém os elementos de D. I[q(x,y]=T $\Leftrightarrow$ existe no diagrama uma seta de x_I para y_I. Quais setas devem ser colocadas no diagrama é definido após o desenvolvimento de
$I[(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))]=F$ conforme as definições.

4) Em cada item, inicie o exercício supondo I[H]=F ou I[H]=T. A escolha deve ser feita a partir dos conectivos da fórmula. Se H é do tipo $H = A \rightarrow B$, escolha I[H]=F pois desta escolha decorre que I[A]=T e I[B]=F. Há apenas uma possibilidade para I[A] e I[B], o que não ocorre se I[H]=T. Observe que há conectivos em que não é possível fazer este tipo de escolha. Se $H=A \leftrightarrow B$, nos dois casos I[H]=T ou I[H]=F há várias possibilidades para I[A] e I[B].

a) É tautologia.

b) É tautologia.

c) Tente resolver
d) Não é tautologia.
e) Não é tautologia.
f) É tautologia.
g) Não é tautologia.
h) É tautologia.
I) Tente resolver.
j) Não é tautologia.
k) Não é tautologia.
l) Não é tautologia.
m) Não é tautologia.
n) É tautologia.
o) É tautologia.
p) É tautologia.
q) Não é tautologia.
r) É tautologia.

5) a) Sim. H=*true*, G=p(a).
b) Sim. H=true, G=p(x).

6) Considerando apenas fórmulas E onde a variável x não ocorre livre e I uma interpretação qualquer sobre D, seja $B[E]$ = "$\forall$ d $\in$ U, $<x \leftarrow d>I[H] = I[H]$". Utilize o princípio da indução na Lógica de Predicados que é igual ao princípio da indução no comprimento das fórmulas.

7) e) Sejam $A=(\forall x)(H \vee G)$ e $B=((\forall x)H \vee G)$. A equivale a B $\Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[A]=I[B]$.
Mas $I[A]=I[B] \Leftrightarrow \{I[A]=F \Leftrightarrow I[B]=F\}$. $I[A]=F \Leftrightarrow I[(\forall x)(H \vee G)]=F \Leftrightarrow \exists\, d \in D$ $<x \leftarrow d>I[H \vee G]=F$
$\Leftrightarrow \exists\, d \in D <x \leftarrow d>I[H]=F$ e $<x \leftarrow d>I[G]=F \Leftrightarrow \exists\, d \in D <x \leftarrow d>I[H]=F$ e $I[G]=F$ $\Leftrightarrow I[(\exists x)H]=F$ e $I[G]=F \Leftrightarrow I[(\exists x)H \vee G]=F \Leftrightarrow I[B]=F$. Observe que nesta demonstração é utilizado o resultado: $<x \leftarrow d>I[G]=I[G]$ pois x não ocorre livre em G.

8) b) Compare este exercício com o item e) do exercício anterior.
Para demonstrar que E_1 não implica E_2 é definido um contra-exemplo. Considere H=p(x) e G=q(x). Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$ tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é um número par, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é um número ímpar. Conforme esta interpretação $I[E_1] = T$ e $I[E_2]=F$. Para demonstrar que E_2 implica E_1, suponha por absurdo que E_2 não implica E_1. Logo, $\exists$ int. I; $I[E_2]=T$ e $I[E_1]=F$. Mas, $I[E_2]=T \Leftrightarrow I[(\forall x)H \vee (\forall x)G] = T \Leftrightarrow$ $I[(\forall x)H]=T$ ou $I[(\forall x)G]=T \Leftrightarrow \forall\, d_1 \in D <x \leftarrow d_1>I[H]=T$ ou $\forall\, d_2 \in D$ $<x \leftarrow d_2>I[G]=T$ Por outro lado, $I[E_1]=F \Leftrightarrow I[(\forall x)(H \vee G]=F \Leftrightarrow \exists\, d_3 \in D$ $<x \leftarrow d_3>I[H \vee G]=F \Leftrightarrow \exists\, d_3 \in D <x \leftarrow d_3>I[H]=F$ e $<x \leftarrow d_3>I[G]=F$. As afirmações "$\forall\, d_1 \in D <x \leftarrow d_1>I[H]=T$ ou $\forall\, d_2 \in D <x \leftarrow d_2>I[G]=T$" e "$\exists\, d_3 \in D <x \leftarrow d_3>I[H]=F$ e $<x \leftarrow d_3>I[G]=F$" são contraditórias. Portanto, E_2 implica E_1.

9) b) $\{\forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x,y)] = I[(\forall x)p(x,y)]\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{\forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x,y)]=T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)]=T\}$. Mas,
$\forall\, d \in D <x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x,y)]=T \Leftrightarrow \forall\, d_1 \in D\ \forall\, d \in D <x \leftarrow d_1><x \leftarrow d>I[p(x,y)]=T$
$\Leftrightarrow \forall\, d_1 \in D <x \leftarrow d_1>I[p(x,y)]=T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)]=T$

10) a) Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$ tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é par, $I[x]=4$. Demonstre que $I[H]=T$.

Por outro lado, $(\forall^*)H = (\forall x)(p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x))$. Suponha que existe interp
tal que $I[(\forall^*)H]=T$. Logo, $I[(\forall x)(p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x))]=T \Leftrightarrow \forall\ d \in D$
$<x \leftarrow d>I[(p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x))]=T \Leftrightarrow$
$\forall\ d \in D <x \leftarrow d>I[(p(x)]=T$ e $<x \leftarrow d>I[\neg(\forall x)p(x))]=T \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in D <x \leftarrow d>I[(p(x)]=T$ e $<x \leftarrow d>I[(\forall x)p(x))]=F$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in D <x \leftarrow d>I[(p(x)]=T$ e $\exists\ d_1 \in D <x \leftarrow d_1><x \leftarrow d>I[p(x)]=F$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in D <x \leftarrow d>I[(p(x)]=T$ e $\exists\ d_1 \in D <x \leftarrow d_1>I[p(x)]=F$. Esta última afir
contraditória. Logo, $\forall$ interpretação I, $I[(\forall^*)H]=F$ e $(\forall^*)H$ é contraditória.

b) $G = p(x) \vee \neg(\exists x)p(x)$. As demonstrações de que G não é tautologia e $(\exists^*)G$ é uma
logia são análogas às demonstrações do item anterior.

11) a) H é insatisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[(\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\ d_3 \in D,\ \forall\ d_2 \in D,\ \forall\ d_1 \in D;\ <y \leftarrow d_1><z \leftarrow d_2><x \leftarrow d_3>I[p(x,y,z)]=F$
$\Leftrightarrow \exists\ d_3 \in D,\ \forall\ d_2 \in D,\ \forall\ d_1 \in D;\ p_I(d_3,d_1,d_2)=F$
H_s é insatisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I, $I[(\forall x)p(x,g(x),f(x))]=F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in D,\ <x \leftarrow d>I[p(x,g(x),f(x))]=F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in D\ p_I(d,g_I(d),f_I(d))=F$
As duas afirmações "$\exists\ d_3 \in D,\ \forall\ d_2 \in D,\ \forall\ d_1 \in D;\ p_I(d_3,d_1,d_2)=F$" e "$\exists\ d \in$
$p_I(d,g_I(d),f_I(d))=F$" são equivalentes pois g_I e f_I são arbitrárias e diferentes. Port
H é insatisfatível $\Leftrightarrow H_s$ é insatisfatível.

b) A generalização consiste em considerar p(x,y,z) uma fórmula H qualquer que con-
tém ocorrências livres de x, y, z. Neste caso, H_s é obtida de H substituindo as ocor-
rências de y e z em H por g(x) e f(x) respectivamente. A demonstração do resultado
geral é feita utilizando o princípio da indução onde
$B[E]$ = "se $E = (\forall x)(\exists z)(\exists y)H$ e $E_s = (\forall x)H_s$, então E é insatisfatível $\Leftrightarrow E_s$ é insatisfa-
vel".

12) a) $H = p(x) \vee \neg(\exists x)p(x)$. Demonstre que H é factível e $(\exists^*)H$ é uma tautologia.
b) $G = p(x)$. Demonstre que G é factível e $(\exists^*)G$ não é tautologia.
c) Não, devido ao resultado do item b).

13) Considere $x_1,\ldots,x_n$ as variáveis que ocorrem livres em H e $y_1,\ldots,y_m$ as que ocorrem em
G.

a) Tem-se que $(\forall^*)H=(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)H$. $\neg(\forall^*)H$ equivale a $(\exists^*)\neg H \Leftrightarrow \forall$ int. I,
$I[\neg(\forall^*)H] = I[(\exists^*)\neg H]$.

Mas, $I[\neg(\forall^*)H] = I[(\exists^*)\neg H] \Leftrightarrow \{I[\neg(\forall^*)H]=T \Leftrightarrow I[(\exists^*)\neg H]=T\}$.
$I[\neg(\forall^*)H]=T \Leftrightarrow I[(\forall^*)H]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow I[(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)H]=F \Leftrightarrow \exists\ d_1 \in D,\ldots,\exists\ d_n \in D;\ <x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I[H]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\ d_1 \in D,\ldots,\exists\ d_n \in D;\ <x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I[\neg H]=T \Leftrightarrow I[(\exists^*)\neg H]=T$.
Portanto, $\neg(\forall^*)H$ equivale a $(\exists^*)\neg H$.

14) Considere $x_1,\ldots,x_n$ as variáveis que ocorrem livres em H

a) Falsa. Considere $H = p(x) \vee \neg(\exists x)p(x)$. Neste caso, $(\exists^*)H$ é tautologia e H não é
tautologia. Demonstre este fato.

b) Verdadeira. Observe inicialmente que a implicação "H é tautologia $\Rightarrow (\exists^*)H$ é tau-
tologia" equivale a "$(\exists^*)H$ não é tautologia $\Rightarrow$ H não é tautologia"

Mas $(\exists^*)H$ não é tautologia $\Leftrightarrow \exists$ int. I; $I[(\exists^*)H]=F \Leftrightarrow \exists$ int. I; $I[(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)H]=F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists$ int. I; $\forall\ d_1 \in D,\ldots,\forall\ d_n \in D;\ <x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I[H]=F$. Fazendo na última afir-
mação $J=<x_n \leftarrow d_n>\ldots<x_1 \leftarrow d_1>I$; conclui-se que $\exists$ int. J; $J[H]=F \Leftrightarrow$ H não é

c) Verdadeira. Demonstre.

d) Verdadeira. Suponha que $(\forall^*)H$ é satisfatível.
Logo, $\exists$ int. I, $I[(\forall^*)H]=T \Leftrightarrow \exists$ int. I; $I[(\forall x_1)...(\forall x_n)H]=T \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists$ int I, $\forall d_1 \in D,...,\forall d_n \in D$; $<x_n \leftarrow d_n>...<x_1 \leftarrow d_1>I[H]=T$. Fazendo na última afirmação $J=<x_n \leftarrow d_n>...<x_1 \leftarrow d_1>I$; conclui-se que $\exists$ int. J; $J[H]=T \Leftrightarrow$ H é satisfatível.

15) a) $H=(p(x) \vee \neg p(x))$.
b) $H=(p(a) \vee \neg p(a))$.
c) $H=(p(x) \vee \neg(\forall x)p(x))$.
d) Não. Demonstre utilizando a mesma técnica do exercício anterior.

16) a) Seja $H = (\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,x) \wedge p(y,y) \wedge \neg p(x,y)) \rightarrow p(z,z))$. Demonstre, utilizando diagramas que descrevem $I[p(x,y)]$, que $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$. Considere uma interpretação J tal que $J[p(x,y)]$ é descrita pelo diagrama. Demonstre que $J[H] = F$.

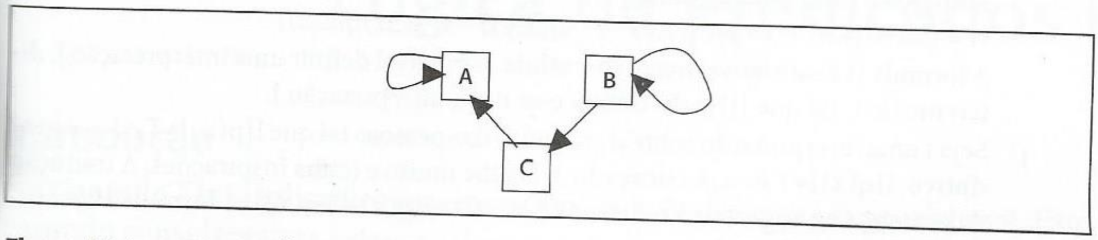

Figura 4 Interpretação do predicado p.

18) a) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é político, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é cientista, $I[r(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é esperto. A sentença é representada por
$H = ((\forall x)(p(x) \rightarrow r(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow \neg r(x))) \rightarrow \neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))$. O argumento é válido se $\forall$ interpretação J, $J[H]=T$. Suponha que $J[H]=F$. Mas,
$J[H]=F \Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow \neg r(x))]=T$ e
$J[\neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))]=F$
$\Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))]=T$ e $J[(\forall x)(q(x) \rightarrow \neg r(x))]=T$ e
$J[(\exists x)(q(x) \wedge p(x))]=T$
$\Leftrightarrow \forall d_1 \in D <x \leftarrow d_1>J[p(x) \rightarrow r(x)]=T$ e $\forall d_2 \in D <x \leftarrow d_2>J[q(x) \rightarrow \neg r(x)]=T$ e
$\exists d_3 \in D$;
$<x \leftarrow d_3>J[q(x) \wedge p(x)]=T$
$\Leftrightarrow \{\forall d_1 \in D <x \leftarrow d_1>J[p(x)]=F$ ou $<x \leftarrow d_1>J[r(x)]=T\}$ e
$\{\forall d_2 \in D <x \leftarrow d_2>J[q(x)]=F$ ou $<x \leftarrow d_2>J[r(x)]=F\}$ e
$\{\exists d_3 \in D; <x \leftarrow d_3>J[q(x)]=T$ e $<x \leftarrow d_3>J[p(x)]=T\}$
$\Leftrightarrow \{\forall d_1 \in D\ p_J(d_1)=F$ ou $r_J(d_1)=T\}$ e
$\{\forall d_2 \in D\ q_J(d_2)=F$ ou $r_J(d_2)=F\}$ e
$\{\exists d_3 \in D; q_J(d_3)=T$ e $p_J(d_3)=T\}$
Analise as três últimas afirmações e determine se elas são contraditórias. Caso isto ocorra, então $J[H]=T$ e o argumento é válido. Se as afirmações não são contraditórias, então H o argumento não é válido.

b) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos seres vivos tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é homem, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é mortal, $I[a]$=Sócrates. A sentença é representada por

$H = (\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge p(a)) \to q(a)$ O argumento é válido se $\forall$ int. J, $J[H]=T$. Suponha que $J[H]=F$. Mas,

$J[H]=F \Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow J[(\forall x)(p(x) \to q(x))]=T$ e $J[p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow \forall\, d \in D <x \leftarrow d>J[p(x) \to q(x)]=T$ e $J[p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow \{\forall\, d \in D$ se $<x \leftarrow d>J[p(x)]=T$ então $<x \leftarrow d>J[q(x)]=T\}$ e $J[p(a)]=T$ e $J[q(a)]=F$

$\Leftrightarrow$ {se $p_J(d)=T$ então $q_J(d)=T$} e $p_J(d)=T$ e $q_J(d) = F$

A última afirmação é falsa pois como $p_J(d)=T$ e {se $p_J(d)=T$ então $q_J(d)=T$}, conclui-se que $q_J(d) = T$, o que está em contradição com $q_J(d)=F$. Portanto, $J[H]=T$ e H é tautologia. O argumento é válido.

e) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas de Coromandel. Suponha $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é barbeiro, $I[q(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ barbeia y_I. A tradução da sentença é dada pela fórmula

$H = (\exists x)((p(x) \wedge (\forall y)(q(y,y) \to \neg q(x,y)) \to \neg(\exists z)q(z,x))$

A fórmula H é satisfatível mas não é válida. É possível definir uma interpretação J, diferente de I, tal que $J[H]=F$. Defina esta nova interpretação J.

j) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é produtivo, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações. A tradução da sentença na Lógica de Predicados é $H = (\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$. A fórmula H é satisfatível mas não é válida.

19) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é mulher, $I[p_1(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é dócil, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é homem, $I[r(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I. As sentenças são representadas por $H_1=(\forall x)(\ (p(x)\wedge p_1(x)) \to (\exists y)(q(y)\wedge r(y,x)))$ e $H_2=(\exists x)(p(x)\wedge p_1(x)) \to (\forall x)(\exists y)(q(y)\wedge r(y,x)))$

a) Afirmação falsa. H_1 não implica H_2.

b) Afirmação verdadeira. H_2 implica H_1.

Demonstre as afirmações.

20) A sentença é representada por

$H=((\exists x)(p_1(x)\wedge r(x)\wedge\neg s(x))\wedge(\forall x)(p_1(x) \to (p(x)\wedge r(x)))\wedge(\forall x)(q(x) \to r_1(x)))$
$\to(\exists x)(p(x)\wedge r(x)\wedge\neg q(x))$

Demonstre se esta fórmula é uma tautologia. Suponha que exista uma int. J; $J[H]=F$.