Lista 12

$$H = (\forall x)(\, p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)r(y,x)).$$

.1	$\neg((\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)r(y,x)))$	$\neg H$
.2	$(\forall x)(\, p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y)))$	R_8,.1
.3	$\neg\neg(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)(r(y,x))$	R_8,.1
.4	$(\exists y)(\, q(y) \wedge (\forall x)(r(y,x))$	R_5,.3
.5	$(q(a) \wedge (\forall x)(r(a,x))$	R_{12},.4
.6	$q(a)$	R_1,.5
.7	$(\forall x)(r(a,x)\,)$	R_1,.5
.8	$p(a) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(a,y))$	R_{12},.2
.9	$\neg p(a)$ aberto | $(\exists y)(q(y) \wedge r(a,y))$	R_3,.8

Figura 10 Tableau aberto.

O tableau da Figura 10 contém um ramo aberto. A partir deste fato, ainda não se pode concluir que H não é uma tautologia. O leitor deve provar que todos os tableaux associados a $\neg H$ são abertos (veja exercícios) e concluir que H não é tautologia. Portanto, os argumentos não são válidos.

Exercícios

1) Considere as regras R_{10} e R_{11} do tableau semântico. Utilize as equivalências

   $(\exists x)A$ equivale a $\neg(\forall x)\neg A$

   e

   $(\forall x)A$ equivale a $\neg(\exists x)\neg A$

   e demonstre que $\{R_5, R_{10}\}$ equivale a $\{R_5, R_{11}\}$.

2) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.

   a) $(\forall x)q(y)$ e $q(y)$
   b) $(\exists x)q(y)$ e $q(y)$
   c) $(\forall x)(p(x) \wedge q(y))$ e $((\forall x)p(x) \wedge q(y))$
   d) $(\exists x)(p(x) \wedge q(y))$ e $((\exists x)p(x) \wedge q(y))$
   e) $(\forall x)(p(x) \vee q(y))$ e $((\forall x)p(x) \vee q(y))$
   f) $(\exists x)(p(x) \vee q(y))$ e $((\exists x)p(x) \vee q(y))$
   g) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(y))$ e $((\exists x)p(x) \rightarrow q(y))$
   h) $(\forall x)(q(y) \rightarrow p(x))$ e $(q(y) \rightarrow (\forall x)p(x))$
   I) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(y))$ e $((\forall x)p(x) \rightarrow q(y))$
   j) $(\exists x)(q(y) \rightarrow p(x))$ e $(q(y) \rightarrow (\exists x)p(x))$

3) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que.
   a) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.
   b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$ então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
   c) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$ então E_1 equivale a E_2.
4) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que.
   a) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow ((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x)))$
   b) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow p(x)))$
   c) $\vdash (\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow p(x)))$
   d) $\vdash (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\forall y)p(y)$
   e) $\vdash (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \rightarrow p(x,y)))$
5) Algumas das fórmulas a seguir são tautologias, outras não. Para cada fórmula demonstre, utilizando tableaux semânticos, se ela é uma tautologia.
   a) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   b) $p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   c) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$
   d) $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$
   e) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$
   g) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
   h) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$
   i) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$
   j) $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$
   k) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$
   l) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
   m) $(\exists x)((p(x) \rightarrow p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow p(b)))$
   n) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \wedge q(y,x)) \rightarrow (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$
   o) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$
   p) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$
   q) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$
   r) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\exists x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$
6) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, que as fórmulas H e G a seguir, são equivalentes.
   a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$
   b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$
   c) $H = \neg(\exists y)H$, $G = (\forall y)\neg H$
   d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$
   e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$
   f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x)$, $G = (\forall x)p(x)$
7) Prove que todos os tableaux associados a
   $H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \wedge r(x,y))) \rightarrow \neg(\exists y)(q(y) \wedge (\forall x)r(y,x))$
   são abertos e conclua que H não é tautologia.
8) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os argumentos são válidos.
   a) Todo político é "esperto". Zé é político. Portanto, Zé é esperto.
   b) Todo político é "esperto". Zé é "esperto". Portanto, Zé é político.
   c) Todo político é "esperto". Nenhum cientista é "esperto". Portanto, nenhum cientista é político.

d) Todo político é "esperto". Existe indivíduo "esperto", que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.
e) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.
f) Todo barbeiro em Patrocínio barbeia somente quem não se barbeia. Logo, o Sr. Orlando, barbeiro de Patrocínio, não se barbeia.
g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa.. portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.
h) Se há fé há amor. Se há amor há paz. Se há paz há Deus. Se há Deus, nada faltará.
i) Quem não se ama, não ama ninguém.

9) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se os conjuntos são satisfatíveis.
a) $\{ (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$
b) $\{\neg(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$
c) $\{ (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), \neg(\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$
d) $\{ (\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
$\neg(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

10) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, quando as afirmações podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.
a) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.
Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
b) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.
Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
c) Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda aluna de Engenharia.
Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
d) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que toda aluna de Engenharia.
Existe aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

11) Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se o conjunto de argumentos a seguir é satisfatível.
- Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.
- Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
- Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda a aluna de Engenharia.

12) Elaine estava conversando com sua amiga Leandra. Pintou uma profunda reflexão e Elaine disse:

– Há mulheres em Sacracity que têm ciúmes de todo os homens.

Leandra pensou e disse:

– Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.

Renato, o bom de bola, estava ouvindo o diálogo e concluiu.

– Nenhuma mulher de Sacracity se casará.

Demonstre, utilizando tableaux semânticos, se a conclusão do Renato é válida ou não.

13) Demonstre, utilizando tableaux semânticos se os argumentos a seguir são válidos.

a) Madalena ama a todos e somente aqueles que amam seu filho. Seu filho ama a todos e somente aqueles que não amam Madalena. Madalena ama a si própria. Portanto, seu filho ama a si próprio.

b) Há monitor que é bom estudante, mas não é comunicativo. Apenas bons estudantes são monitores. Todo artista é comunicativo. Portanto, nem todo bom estudante é um artista.

14) Considere as afirmações a seguir.

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.

Demonstre se as afirmações a seguir são válidas.

a) H_1 implica H_2.

b) H_2 implica H_1.

15) Demonstre, utilizando os teoremas da completude e da correção se as afirmações são verdadeiras.

a) Se H é tautologia, então existe tableau fechado associado a H.

b) Se H é tautologia, então pode existir tableau aberto associado a H.

c) Se H não é tautologia, então não existe tableau fechado associado a H.

d) Se H não é tautologia, então todo tableau associado a H é aberto.

e) Se existe tableau associado a H fechado, então H é tautologia.

f) Se existe tableau associado a H que é aberto, então não se pode concluir que H não é tautologia.

g) Se todo tableau associado a H é aberto, então H não é tautologia.

16) Demonstre o teorema da correção para tableaux semânticos na Lógica de Predicados.

17) Considere os argumentos.

Todo atleta é determinado.

Toda pessoa determinada e inteligente não é uma perdedora.

Guga é um atleta e amante do tênis.

Toda pessoa é amante do tênis se é inteligente.

Portanto, Guga não é um perdedor.

Utilize o método dos tableaux semânticos para responder se os argumentos acima são válidos.

18) É possível definir uma tautologia H, da lógica de predicados H, com um tableau associado aberto? Justifique.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Para demonstrar que $\{R_5, R_{10}\} \Rightarrow \{R_5, R_{11}\}$ observe que o antecedente de R_{11}, $\neg(\exists x)A$ é equivalente a $\neg\neg(\forall x)\neg A$. Aplicando R_5 em $\neg\neg(\forall x)\neg A$ obtém-se $(\forall x)\neg A$, que é o conseqüente R_{11}. Da mesma forma é demonstrado que $\{R_5, R_{11}\} \Rightarrow \{R_5, R_{10}\}$.

2) Dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G $\Leftrightarrow$ $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia. Para demonstrar este fato utilizando tableau semântico, inicie o tableau com a fórmula $\neg(H \leftrightarrow G)$. Se for possível obter um tableau fechado então H equivale a G.
3) Dadas duas fórmulas E_1 e E_2, E_1 equivale a $E_2 \Leftrightarrow (E_1 \leftrightarrow E_2)$ é tautologia e E_1 implica E_2 $\Leftrightarrow (E_1 \rightarrow E_2)$ é tautologia. Para demonstrar tais fatos, utilizando tableaux semânticos, inicie o tableau com a fórmula $\neg(E_1 \leftrightarrow E_2)$ ou $\neg(E_1 \rightarrow E_2)$. Se for possível obter um tableau fechado então E_1 equivale a E_2 ou E_1 implica E_2, respectivamente. E_1 não implica E_2 quando não for possível obter tableau fechado.
4) Inicie o tableau com a negação da fórmula a ser provada. Neste caso, inicie com $\neg((\forall x)((p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow ((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))))$
Os outros itens deste exercício são análogos.
5) Em cada item, inicie o tableau com a negação da fórmula. Se for possível obter um tableau fechado, então a fórmula é uma tautologia. Observe que nem sempre é possível obter um tableau fechado na primeira tentativa.
6) Demonstre em cada caso que é possível obter um tableau fechado a partir de $\neg(H \leftrightarrow G)$.
7) Esta prova é feita por exaustão. Dê argumentos justificando que não é possível obter um tableau fechado a partir de $\neg H$.
8) Em cada item, represente a afirmação na Lógica de Predicados por uma fórmula H. Em seguida, demonstre utilizando tableaux semânticos se H é tautologia. Se for possível obter um tableau fechado a partir de $\neg H$, então H é tautologia e o argumento é válido.
9) Dado um conjunto de fórmulas $\beta = \{A, B, C\}$, β é insatisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I; I[A]=F ou I[B]=F ou I[C]=F $\Leftrightarrow \forall$ int. I; $I[A \wedge B \wedge C]$=F $\Leftrightarrow \forall$ int. I; $I[\neg(A \wedge B \wedge C)]$=T $\Leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia. Portanto, para demonstrar que o conjunto de fórmulas $\beta = \{A, B, C\}$ é insatisfatível basta demonstrar que $\neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia. Mas para demonstrar se $\neg(A \wedge B \wedge C)$ é tautologia utilizando tableau semântico, é necessário iniciar o tableau com $\neg\neg(A \wedge B \wedge C)$ ou equivalentemente com $(A \wedge B \wedge C)$.
10) Em cada item, represente as afirmações por fórmulas da Lógica de Predicados. As afirmações de cada conjunto podem ser verdadeiras ao mesmo tempo quando o conjunto das fórmulas que as representam é satisfatível. Para demonstrar a satisfatibilidade de um conjunto de fórmulas veja o exercício anterior.
11) Vejas as sugestões dos dois exercícios 9 e 10.
12) Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ é mulher, $I[q(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ reside em Sacracity, $I[r(x,y)]=T \Leftrightarrow x_I$ tem ciúmes de y_I. $I[p_1(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ tem uma paixão, $I[q_1(x)]=T \Leftrightarrow x_I$ se casará. Neste caso, Elaine disse:
– Há mulheres em Sacracity que têm ciúmes de todos os homens.
que é representado por $(\exists x)(p(x) \wedge q(x) \wedge (\forall y)(\neg p(y) \rightarrow r(x,y)))$
Leandra disse:
– Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.
que é representado por
$(\forall x)((p(x) \wedge (\exists y)r(x,y)) \rightarrow p_1(x))$
Renato concluiu.
– Nenhuma mulher de Sacracity se casará.
que é representado por
$(\forall x)((p(x) \wedge q(x)) \rightarrow \neg q_1(x))$
Para demonstrar se a conclusão do Renato é válida ou não, deve-se demonstrar que a fórmula H é uma tautologia.

$$H = ((\exists x)(p(x) \land q(x) \land (\forall y)(\neg p(y) \to r(x,y)) \land (\forall x)((p(x) \land (\exists y) r(x,y)) \to p_1(x))) \to (\forall x)((p(x) \land q(x)) \to \neg q_1(x))$$

15) a) Afirmação verdadeira. Se H é tautologia, então pelo teorema da completude existe prova de H utilizando tableaux semânticos. Logo, existe tableau fechado associado a H.

b) Afirmação verdadeira. É possível definir uma tautologia H e um tableau aberto associado a H.

c) Afirmação verdadeira. Se H não é tautologia, então pelo teorema da correção não existe prova de H utilizando tableaux semânticos. Logo, não existe tableau fechado associado a H.

d) Afirmação verdadeira. Seguindo o raciocínio do item anterior, conclui-se que não existe tableau fechado associado a H. Portanto, todo tableau associado a H é aberto.

e) Afirmação verdadeira. Se existe tableau associado a H é fechado, então existe prova de H por tableau. Logo, pelo teorema da completude H é tautologia.

f) Afirmação verdadeira. Se existe tableau associado a H que é aberto, isto não significa que não exista tableau fechado associado a H. Logo, não necessariamente H não é tautologia.

g) Afirmação verdadeira. Se todo tableau associado a H é aberto, então não existe prova de H por tableau. Logo, pelo teorema da completude H não é tautologia.

16) Esta demonstração é análoga à demonstração do teorema da correção para tableaux semânticos na Lógica Proposicional. Considere o mesmo raciocínio para as regras R_{10}, R_{11}, R_{12} e R_{13}. Uma demonstração mais rigorosa deve ser feita utilizando o princípio da indução no comprimento das fórmulas ou o princípio da indução na Lógica de Predicados.

17) Utilize as seguintes definições: Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas, tal que: $I[p(x)] = T$ se x_I é atleta. $I[q(x)] = T$ se x_I é determinado. $I[r(x)] = T$ se x_I é inteligente. $I[p(x)] = T$ se x_I é amante do tênis. $I[p_1(x)] = T$ se x_I é perdedor. $I[a]$ = Guga.

18) Sim.