

Exercícios

- 1) Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da Lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, onde os símbolos de pontuação podem ser omitidos.
- $(PQ \vee \text{true})$
 - $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg \neg R)$
 - $\neg \neg P$
 - $\vee Q$
 - $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$
- 2) Responda as questões a seguir, justificando suas respostas.
- Existe fórmula sem símbolo de pontuação?
 - Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da Lógica Proposicional? Quais são estes símbolos?
 - Existe fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação?
- 3) Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.
- $((\neg \neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge \text{true}$
 - $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
 - $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$
 - $\neg(P \rightarrow \neg P)$
- 4) *Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula original.*
- $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q)))) \rightarrow R)) \wedge P$
 - $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg R \vee \neg P))$
 - $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$
- 5) Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da Lógica Proposicional é possível obter.
- $P \vee \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$
 - $Q \rightarrow \neg P \wedge Q$
 - $\neg P \vee Q \leftrightarrow Q$
 - $\neg \neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \rightarrow \neg \neg R$
- 6) Conforme a definição de fórmula, os conectivos proposicionais diferentes de \neg devem ser escritos na forma infixa. Isto é, o conectivo \wedge por exemplo, deve ser escrito entre dois símbolos proposicionais ou duas fórmulas. A definição de fórmula na Lógica Proposicional poderia ser modificada, possibilitando escrever os conectivos na notação prefixa, conforme indicado pelas correspondências a seguir.
- $(\neg P)$ corresponde a $\neg P$ na notação prefixa. Neste caso, apenas os símbolos de pontuação são omitidos.
- $(P \wedge Q)$ corresponde a $\wedge PQ$. Neste caso, o conectivo \wedge é colocado no início da fórmula e os símbolos de pontuação são omitidos.
- $(P \vee Q)$ corresponde a $\vee PQ$,
- $(P \rightarrow Q)$ corresponde a $\rightarrow PQ$ e
- $(P \leftrightarrow Q)$ corresponde a $\leftrightarrow PQ$.

A utilização dos conectivos na forma prefixa determina uma notação denominada notação polonesa.

- a) Escreva as fórmulas dos exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.
 b) Determine quais seqüências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da Lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a seqüência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.

$$\begin{aligned} & \vee \rightarrow PQ \leftrightarrow R \rightarrow \vee PQ \neg S \\ & \rightarrow \leftrightarrow PQ \vee \rightarrow PQ \rightarrow \neg RR \\ & \rightarrow \neg P \neg QR \wedge \wedge PQ \vee \neg R \neg P \\ & \leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg \neg R \neg P \end{aligned}$$

- 7) Responda, justificando sua resposta.
- a) É possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, que corresponda a duas fórmulas diferentes escrita na notação polonesa?
 b) É possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa, que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional?
- 8) Faça os exercícios 6 e 7 considerando a notação pós-fixa, indicada pelas correspondências.
- ($\neg P$) corresponde a $P\neg$,
 ($P \wedge Q$) corresponde a $PQ\wedge$.
 ($P \vee Q$) corresponde a $PQ\vee$.
 ($P \rightarrow Q$) corresponde a $PQ\rightarrow$ e
 ($P \leftrightarrow Q$) corresponde a $PQ\leftrightarrow$.
- 9) Qual a paridade do número de símbolos de pontuação de uma fórmula da Lógica Proposicional?
- 10) Seja H uma fórmula que não contém o conectivo \neg .
- a) Qual a paridade de $\text{comp}[H]$?
 b) Qual a relação entre $\text{comp}[H]$ e o número de conectivos de H?

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

- 1) a) Não é fórmula.
 b) É fórmula.
 c) É fórmula.
 d) Não é fórmula.
 e) É fórmula.
- 2) a) Sim, por exemplo, as fórmulas P, true etc.
 c) Não.
- 3) a) 11
- 4) a) $\neg\neg P \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P)$
- 5) c) $((\neg P) \vee (Q \leftrightarrow Q))$
- 6) a) A fórmula do item a) do exercício 4 é escrita como:
 $\leftrightarrow \wedge \neg \rightarrow \neg \neg \vee PQR P \neg \neg P$
 b) $\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg \neg R \neg P$