

## Lista 2

c)  $\rightarrow$  e  $\Rightarrow$

d)  $\leftrightarrow$  e  $\Leftrightarrow$

Os símbolos  $\Rightarrow$  e  $\Leftrightarrow$  são aqueles utilizados freqüentemente em demonstrações na Matemática.

- 2) Comente, do ponto de vista lógico
- a diferença entre sintaxe e semântica,
  - a diferença entre veracidade e validade,
  - a diferença entre falsidade e contradição.
- 3) A interpretação do conectivo  $\vee$ , na Lógica Proposicional, corresponde ao exato significado da palavra “ou”? Justifique sua resposta. Nessa análise, considere, por exemplo, o significado da sentença: “Vou ao teatro OU ao cinema” como sendo verdadeiro. Desse fato, é possível concluir que irei ao teatro e ao cinema ao mesmo tempo?
- 4) Seja  $I$  uma interpretação e a fórmula  $H = (P \rightarrow Q)$ .
- Se  $I[H] = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I[P]$  e  $I[Q]$ ?
  - Se  $I[H] = T$  e  $I[P] = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I[Q]$ ?
  - Se  $I[Q] = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I[H]$ ?
  - Se  $I[H] = T$  e  $I[P] = F$ , o que se pode concluir a respeito de  $I[Q]$ ?
  - Se  $I[Q] = F$  e  $I[P] = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I[H]$ ?
- 5) Considere as fórmulas a seguir:
- $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
  - $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
  - $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$
  - $(Q \rightarrow \neg P)$
  - $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
  - $(R \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \wedge R)$
  - $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$
  - $(\text{false} \rightarrow Q) \leftrightarrow R$
  - $\text{true} \rightarrow Q$
  - $(P \rightarrow \text{false}) \leftrightarrow R$
  - $P \rightarrow \text{true}$
- Determine a tabela verdade associada a cada fórmula.
  - Seja  $I$  uma interpretação tal que  $I[P] = T$ ,  $I[Q] = F$  e  $I[R] = F$ , o que se pode concluir a respeito do valor de verdade de cada fórmula?
  - Seja  $J$  uma interpretação que interpreta todas as fórmulas acima como sendo verdadeiras. Além disso,  $J[P] = T$ . O que se pode concluir a respeito de  $J[Q]$  e  $J[R]$ , em cada um dos casos?
- 6) Seja  $I$  uma interpretação tal que:  $I[P \rightarrow Q] = F$ . O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?
- $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)]$
  - $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)]$
  - $I[(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)]$
- Repita este exercício supondo  $I[P \rightarrow Q] = T$
- 7) Seja  $I$  uma interpretação tal que:  $I[P \leftrightarrow Q] = T$ . O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?
- $I[\neg P \wedge Q]$
  - $I[P \vee \neg Q]$

## 22 ... LÓGICA PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- c)  $I[Q \rightarrow P]$
- d)  $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)]$
- e)  $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)]$

Repita este exercício supondo  $I[P \leftrightarrow Q] = F$ .

- 8) Seja H a fórmula a seguir e I uma interpretação.

$$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))) \rightarrow P$$

- a) Se  $I[P] = F$  o que se pode concluir a respeito de  $I[H]$ ?
  - b) Se  $I[P] = T$  o que se pode concluir a respeito de  $I[H]$ ?
- 9) Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Justifique a afirmação a seguir. Cada linha da tabela verdade associada a H corresponde a uma interpretação diferente para H.
- 10) Escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Utilize símbolos proposicionais para representar sentenças atômicas.
- a) Se eu sou feliz, você é infeliz e se você é infeliz, eu não sou feliz.
  - b) José virá à festa e Maria não gostará ou José não virá à festa e Maria gostará da festa.
  - c) A novela será exibida, a menos que seja exibido o programa político.
  - d) Se chover irei para casa, caso contrário, ficarei no escritório.
  - e) Se Maria é bonita, inteligente e sensível e se Rodrigo ama Maria, então ele é feliz.
  - f) Se Sr. Oscar é feliz, Sra. Oscar é infeliz e se Sra. Grotta é feliz, Sr. Grotta é infeliz.
  - g) Maurício virá à festa e Kátia não virá ou Maurício não virá a festa e Kátia ficará infeliz.
  - h) Irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.
  - i) Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.
- 11) Caso seja possível, escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Na impossibilidade, justifique.
- a) Todo homem é mortal.
  - b) Possivelmente, irei ao cinema.
  - c) Fui gordo, hoje sou magro.
  - d) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.
  - e) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.
  - f) Existe aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas.
  - g) Necessariamente algum político é desonesto.
  - h) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.
  - i) Quase todo político é desonesto.
  - j) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.
  - k) Toda regra tem exceção.
  - l) Quase todo funcionário da Algar é um talento.
  - m) Poucos funcionários da Algar não são empreendedores.
  - n) O presidente da Algar é admirado por seus colaboradores.

Os exercícios a seguir são curiosidades que utilizam raciocínio lógico na solução.

- 12) (Após a morte) Após a morte, o espírito de um homem foi conduzido às portarias do céu e do inferno. Nesse local, havia duas portas exatamente iguais. Uma para o céu e outra para o inferno. Havia também dois porteiros, um perfeitamente honesto e outro completamente mentiroso. Os porteiros se conheciam, isto é, o mentiroso sabia que o outro era honesto e vice-versa. Entretanto, o espírito do homem que morreu não os conhecia. Como que o espírito descobriu a porta do céu fazendo uma única pergunta para um dos porteiros? Após a descoberta da porta do céu, o espírito não necessariamente foi para o céu. Atualmente há inúmeros espíritos que gostam de um inferninho.

- 13) (Proposta complicada) O Sr. Justino, apesar de trabalhador, não estava indo bem nos negócios. Devia muito dinheiro a um agiota da cidade. O agiota, um sucesso na vida profissional, era baixinho, barrigudo e careca. Tinha mau hálito, dentadura amarelada e um par de óculos bem grossos. Estava sempre usando um terno preto, com os ombros esbranquiçados pela caspa. No fim de semana o agiota foi ao encontro de Justino. Queria um acerto de contas. O agiota, Justino e sua filha, uma linda moça no esplendor de sua juventude, saíram andando por uma estrada cheia de pedras brancas e pretas. Naquele momento, o agiota fez uma proposta a Justino. “Sr. Justino, quero fazer-lhe uma proposta. Caso aceite o jogo determinado pela proposta, perderei a dívida. Caso contrário, terá que pagá-la integralmente e à vista. A proposta consiste em colocar duas pedras, uma preta e uma branca, no interior deste saco de pano. Em seguida, sua filha retirará uma pedra. Se a pedra for preta ela se casará comigo. Caso contrário, ela estará livre. Quero deixar claro que sua dívida será perdoada pelo simples fato de aceitar o jogo.” O Sr. Justino pensou por um momento e aceitou o jogo. Mas o agiota trapaceou e pegou duas pedras pretas e as colocou no saco. Entretanto, a bela filha do Sr. Justino percebeu a trapaça do agiota. Mais inteligente que o agiota, ela usou o fato de haver apenas pedras pretas no interior do saco. Fez “ALGUMA COISA” e se saiu muito bem. O que a filha do Sr. Justino fez para se livrar daquele casamento? Lembre que a filha do Sr. Justino estuda Lógica desde o jardim-de-infância.
- 14) (Perdido na floresta) Um colecionador de borboletas andava pela floresta à procura dos belos insetos. De repente ele foi capturado por índios antropófagos e levado ao centro da aldeia. Lá, os índios prepararam um caldeirão com tempero à vontade. Salsa, pimenta-do-reino, alho, cebola etc. Ao lado do caldeirão se encontrava o chefe da tribo, que aprendera Lógica pela Internet. Ele se dirigiu ao colecionador, fazendo a seguinte proposta: “Sr. Colecionador, faça uma afirmação! Se a sua afirmação for verdadeira, então o senhor será cozido em fogo brando neste caldeirão e em seguida devorado pelos companheiros da tribo. Por outro lado, se sua afirmação for falsa, então o Sr. será comido vivo.” O colecionador ficou aflito. Mas ele, assim como o chefe da tribo, também sabia um pouco de lógica. O colecionador fez uma afirmação e foi libertado pelo chefe. Qual a afirmação feita por ele? Esta questão mostra que nem toda afirmação pode ser interpretada como verdadeira ou falsa, como ocorre na Lógica Proposicional clássica.
- 15) (Nem tudo é verdadeiro ou falso) Na Lógica Proposicional, as fórmulas são interpretadas como sendo verdadeiras ou falsas. Entretanto, há sentenças, escritas em português, que não são verdadeiras e nem falsas. Não é possível interpretar todos os fatos como verdadeiros ou falsos. Escreva uma sentença que não é verdadeira e nem falsa.
- 16) (Na terra dos honestos e mentirosos) Um turista está andando pela terra dos homens honestos e mentirosos. Lá, as pessoas são radicais e se classificam em duas categorias. São perfeitamente honestas ou completamente mentirosas. Elas só falam mentiras ou só falam verdades. Chegou a hora do almoço e o turista se encontra em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nesta encruzilhada há duas estradas: uma para um restaurante e a outra para “lugar algum”. Ali, há também um homem nativo. Naturalmente, o turista não sabe se aquele homem é honesto ou mentiroso. Como o turista descobre o caminho para o restaurante fazendo uma única pergunta ao homem da encruzilhada?
- 17) (Trabalhadores, capitalistas e estudantes) O turista do exercício anterior continua suas férias. Desta vez ele está em férias por um país onde cada pessoa é classificada como trabalhador, capitalista ou estudante. Os trabalhadores são honestos e só falam a verdade. Os capitalistas, ao contrário, são desonestos e mentem sempre. Os estudantes agem

como trabalhadores e capitalistas. Às vezes são honestos, mas podem agir de forma desonesta também. Como no exercício anterior, chegou a hora do almoço e o turista se encontra em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nesta encruzilhada há duas entradas: uma para um restaurante e a outra para um abismo. Ali, há um trabalhador, um capitalista e um estudante. Apenas olhando para aqueles nativos não é possível ao turista identificá-los. Portanto, ele não sabe quem é honesto ou mentiroso. Como o turista descobre o caminho para o restaurante fazendo apenas duas perguntas? Cada pergunta deve ser dirigida a uma única pessoa que se encontra na encruzilhada.

## Sugestões e soluções de exercícios selecionados

- 1) a) *true* é um símbolo sintático e T é um símbolo semântico.  
c)  $\rightarrow$  é um símbolo sintático e  $\Rightarrow$  é um símbolo semântico.
- 2) sintaxe = símbolos e semântica = significado.
- 4) a) Nada se pode concluir a respeito dos valores de verdade I[P] e I[Q].  
b) I[Q] = T  
c) I[H] = T  
d) Nada se pode concluir a respeito de I[Q]?  
e) I[H] = F
- 5) a)  $I[(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)] = T$ . Nada se pode concluir a respeito de J[Q] e J[R].
- 6) a)  $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)] = T$   
b)  $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)] = T$   
c) Nada se pode concluir a respeito de  $I[(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)]$
- 8) a) I[H] = F  
b) I[H] = T
- 10) a) Considere as associações: P = eu sou feliz, Q = você é feliz. Neste caso, a representação é dada por  $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$   
b) Considere as associações: P = José virá à festa, Q = Maria gostará da festa. Nesse caso, a representação é dada por  $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ .
- 11) A rigor, qualquer uma das sentenças pode ser representada na Lógica Proposicional. Basta representar toda a sentença por um símbolo proposicional. Desconsiderando esse tipo de representação trivial algumas sentenças não podem ser representadas na Lógica Proposicional.
  - a) Não é possível representar devido ao quantificador “todo”, que é considerado apenas na Lógica de Predicados.
  - b) Não é possível representar a semântica de “possivelmente” que é considerada apenas na Lógica Modal.
  - c) Não é possível representar pois o “tempo” não é considerado na Lógica Proposicional.
  - d) Não é possível representar devido ao quantificador “existe”, que é considerado apenas na Lógica de Predicados
  - l) Não é possível representar pois “quase todo” é uma quantificação desconsiderada na Lógica Proposicional.
  - m) Não é possível representar pois “poucos” é uma quantificação desconsiderada na Lógica Proposicional.
- 17) Uma solução para este problema, que pode servir como paradigma para a solução dos outros exercícios, é feita a seguinte pergunta a

1ª pergunta: Qual o caminho para o restaurante que cada um dos outros indivíduos me indicará?

Para simplificar a análise das respostas, considere as seguintes correspondências:

- R  $\Leftrightarrow$  Caminho para o restaurante,
- A  $\Leftrightarrow$  Caminho para o abismo,
- NR  $\Leftrightarrow$  Não é possível responder.

A primeira pergunta pode ser feita ao operário, ao estudante ou ao capitalista. Logo, há várias possibilidades de conjuntos de respostas.

- ii) Se a primeira pergunta for feita ao estudante, haverá três possibilidades de listas de respostas:

Respostas possíveis do estudante: {R, A}, {R, R}, {A, A}.

O primeiro conjunto de respostas, por exemplo, determina que um dos indivíduos indica o caminho para o restaurante e o outro o caminho do abismo. Observe que o estudante fala a verdade e/ou mente sobre as respostas dos outros indivíduos. Desta forma, ele sabe que o capitalista sempre indicará o caminho para o abismo e que o operário indicará o caminho correto, representados respectivamente por A e R. Logo, há três possibilidades:

- a) Ele fala a verdade sobre as respostas do operário e do capitalista: Respostas {R, A}.
- b) Ele mente sobre tais respostas: Resposta {A, R}.
- c) Ele mente sobre a resposta de um indivíduo: Respostas {A, A} e {R, R}.
- iii) Se a primeira pergunta for feita ao capitalista, ocorre apenas o conjunto de respostas {A, NR}. Neste caso, como o capitalista sempre mente, ele muda a resposta do operário de R para A e nada responde sobre o caminho indicado pelo estudante.
- iiii) Se a primeira pergunta for feita ao operário, ele sabe que o capitalista mente e indica o caminho A. Também neste caso, o operário nada responde sobre o caminho indicado pelo estudante. Logo, o conjunto de respostas é {A, NR}. Concluindo, a partir dos possíveis conjuntos de respostas para a primeira pergunta, é possível dividir o conjunto de indivíduos que se encontram na encruzilhada {estudante, operário, capitalista} em dois subconjuntos: {estudante} e {operário, capitalista}. Observe que o resultado deste fato é a identificação do estudante. Em seguida, é feita a segunda pergunta para um dos indivíduos que não é o estudante.

2ª pergunta: Qual o caminho para o restaurante que o outro indivíduo me indicaria?

Neste caso, o "outro indivíduo" citado na pergunta anterior não pode ser o estudante. O turista deve indicar explicitamente o indivíduo, que não é o estudante. Se a segunda pergunta for feita ao operário, a resposta será: [A], pois ele é honesto e sabe que o capitalista mente. Se a segunda pergunta for feita ao capitalista, a resposta também será: [A]. O capitalista sabe que o operário responderia [R], mas como ele mente, sua resposta será [A]. Para finalizar, após a resposta da segunda pergunta, basta o turista seguir o caminho oposto àquele indicado nesta resposta.