

Lista 3

Exercícios

- 1) Demonstre se as afirmações são verdadeiras.
 - a) Se $(E \leftrightarrow G)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são tautologias, então $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.
 - b) $(E \leftrightarrow G)$ é tautologia se e somente se $(E \wedge G)$ é tautologia ou $(\neg E \wedge \neg G)$ é tautologia.

- c) Se $I[E \leftrightarrow G]=T$, então $I[E \wedge G]=T$ ou $I[\neg E \wedge \neg G]=T$.
- d) $\neg(E \leftrightarrow G)$ é tautologia se e somente se E e $\neg G$ são tautologias.
- e) Se $I[\neg(E \rightarrow G)]=T$, então $I[E]=I[\neg G]=T$.
- f) Comente a relação entre os resultados dos itens b) e c) com os itens d) e e) respectivamente.
- 2) Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H implica G .
- a) $H = P \wedge Q, G = P$
- b) $H = P \vee Q, G = P$
- c) $H = P \vee \neg Q, G = \text{false}$
- d) $H = \text{false}, G = P$
- e) $H = P, G = \text{true}$
- 3) Considere as fórmulas H_1, \dots, H_{10} , que são formadas utilizando os símbolos proposicionais P e Q e possuem a tabela verdade a seguir:

Tabela 4 Tabela verdade associada às fórmulas H_1, \dots, H_{10} .

P	Q	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
T	T	T	T	T	T	F	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	F	F

- a) Identifique os valores de i tais que H_i implica H_j para todo j .
- b) Identifique os valores de i tais que H_i não implica H_j para todo j .
- c) Identifique valores de i, j, k diferentes entre si, tais que H_i implica H_j e H_j implica H_k . Certifique-se de que H_i implica H_k .
- d) Existem valores de i, j diferentes entre si, tais que H_i implica H_j e H_j implica H_i ? Como deve ser a relação entre as colunas de H_i e H_j para que essas relações de implicação ocorram?
- e) Existem valores de i, j tais que H_i implica H_j e H_j não implica H_i ?
- f) Existem valores de i, j, k diferentes entre si, tais que H_i implica H_j , H_j implica H_k e H_k implica H_i ? Como deve ser a relação entre as colunas de H_i, H_j e H_k para que essas relações de implicação ocorram?
- g) O conjunto de fórmulas $\{H_2, H_3, H_4, H_5\}$ é satisfável?
- h) Qual o maior conjunto obtido das fórmulas H_1, \dots, H_{10} , que é satisfável?
- i) Identifique as fórmulas H_i , que são tautologias, que são satisfáveis e que são contraditórias.
- j) Construa as fórmulas H_1, \dots, H_{10} a partir dos símbolos proposicionais P e Q .
- 4) Considere as fórmulas H e G , que são formadas utilizando apenas os símbolos proposicionais P e Q e a tabela associada.

- m) H é satisfatível $\Rightarrow H \wedge G$ equivale a G
- n) H é tautologia ou G é tautologia \Rightarrow se $\neg H$ é contraditória, então G é tautologia
- 9) Demonstre se as implicações a seguir são verdadeiras ou falsas.
- H é satisfatível $\Rightarrow H$ é tautologia
 - H equivale a $G \Rightarrow H$ implica G
 - H implica $G \Rightarrow H$ equivale a G
 - H implica $G \Rightarrow (H \vee E)$ implica $(G \vee E)$
 - H implica $G \Rightarrow (H \wedge E)$ implica $(G \wedge E)$
 - H implica $G \Rightarrow (G \rightarrow E)$ implica $(H \rightarrow E)$
 - $(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n)$ é tautologia $\Rightarrow \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é satisfatível
 - $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é satisfatível $\Rightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n)$ é tautologia
 - $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é satisfatível $\Rightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n)$ é satisfatível
 - $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é insatisfatível $\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n)$ é tautologia
 - $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é satisfatível $\Rightarrow H_1, H_2, \dots, H_n$ são equivalentes entre si
 - H é satisfatível \Rightarrow existem infinitas interpretações I , tais que $I[H] = T$.
 - As fórmulas contraditórias são equivalentes entre si.
 - As fórmulas válidas são equivalentes entre si.
 - As fórmulas satisfatíveis são equivalentes entre si.
 - H é satisfatível $\Rightarrow \neg H$ é satisfatível?
 - Toda tautologia é uma fórmula factível.
 - H implica $G \Rightarrow (H \rightarrow E)$ implica $(G \rightarrow E)$.
- 10) Dadas as fórmulas H e G , demonstre que
- H é contraditória $\Rightarrow (H \rightarrow G)$ é válida.
 - H é tautologia e G é contraditória $\Rightarrow (H \rightarrow G)$ é contraditória.
 - Demonstre se é verdadeiro ou falso o inverso das implicações expressas nos itens a) e b).
- 11) Seja I uma interpretação e as fórmulas H e G . Demonstre que:
- Se $I[H] = T$ e $I[H \rightarrow G] = T$, então $I[G] = T$.
 - Se $I[H \rightarrow G] = T$, então não necessariamente $I[G] = T$.
- 12) Dadas as fórmulas H e G , demonstre que:
- H implica $G \Leftrightarrow$ não existe interpretação I ; $I[H] = T$ e $I[G] = F$.
 - H não implica $G \Leftrightarrow \exists$ interpretação I ; $I[H] = T$ e $I[G] = F$.
 - H implica $G \Leftrightarrow \exists$ interpretação I ; $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$.
- 13) Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras e falsas. Justifique suas respostas.
- Dada uma fórmula contraditória H , é possível encontrar uma interpretação I tal que $I[H] = T$.
 - Se H é uma tautologia, então não existe interpretação I tal que $I[\neg H] = T$.
 - Se $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ é um conjunto satisfatível de fórmulas, então para toda interpretação I , $I[H_1] = T$
- 14) Sejam H e G duas fórmulas tais que H implica G . A partir deste fato, é possível concluir que para toda interpretação I , $I[H] = T$ e $I[G] = T$? Justifique sua resposta.
- 15) Considere os conjuntos de fórmulas a seguir: Determine quais conjuntos são satisfatíveis.
- $\{P, \neg P\}$

- b) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$
 c) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$
 d) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$
 e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, S \rightarrow P\}$
 f) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$
 g) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$
- 16) É possível encontrar duas fórmulas H e G que contradizem as afirmações:
 a) H equivale a G \Rightarrow {H é tautologia \Leftrightarrow G é tautologia}.
 b) H equivale a G \Leftrightarrow {H \leftrightarrow G é tautologia}.
 c) H equivale a G \Leftrightarrow {H é tautologia \Leftrightarrow G é tautologia}.
- 17) Suponha que H implica G e H equivale a $\neg E$. Demonstre se o conjunto de fórmulas $\{\neg G, E \rightarrow \neg H, H\}$ é satisfável.
- 18) Considere os conjuntos de argumentos indicados a seguir. Que conjuntos de argumentos são satisfáveis?
 a) Marcos não está feliz ou se Sílvia foi ao baile, então Marcos também foi ao baile. Se Marcos está feliz, então Sílvia não foi ao baile. Se Marcos foi ao baile, então Sílvia também foi ao baile.
 b) Um casamento é feliz se e somente se os noivos têm objetivos comuns. Os noivos têm objetivos comuns se e somente se os noivos cursam disciplinas em áreas comuns. Há divórcio se e somente se o casamento é infeliz. Há divórcio se e somente se os noivos não cursam disciplinas em áreas comuns.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

- 1) a) Suponha que $(E \leftrightarrow G)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são tautologias. Mas,
 $(E \leftrightarrow G)$ é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, $I[E] = I[G]$
 $(G \leftrightarrow H)$ é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, $I[G] = I[H]$
 Como $I[E] = I[G]$ e $I[G] = I[H]$, então $I[E] = I[H]$. Portanto, \forall interpretação I, $I[E] = I[H]$, o que significa que $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.
 b) Esta afirmação não é verdadeira. Considere o contra-exemplo $E = P$ e $G = \neg\neg P$. Neste caso, $(P \leftrightarrow \neg\neg P)$ é tautologia, mas nenhuma das fórmulas $(P \wedge \neg\neg P)$ e $(\neg P \wedge \neg\neg\neg P)$ são tautologias.
 c) Afirmação verdadeira.
 d) Afirmação verdadeira.
 e) Afirmação verdadeira.
- 2) a) Sim
 b) Não
 c) Não
 d) Sim
 e) Sim
- 4) a) Colunas iguais.
 b) Se ocorre T na coluna de H, então necessariamente ocorre T na coluna de G.

- 5) $\{A, B, C, D\}$ é insatisfável \Leftrightarrow não existe interpretação
 $\Leftrightarrow I; I[A]=I[B]=I[C]=I[D]=T$
 $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I, I[A]=F$ ou $I[B]=F$
 ou $I[C]=F$ ou $I[D]=F$
 $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I, I[A \wedge B \wedge C \wedge D]=F$
 $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I, I[\neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)]=T$
 $\Leftrightarrow \neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)$ é tautologia.

- 7) a) Não
 b) Sim
 c) Não
 d) Sim
 e) Sim
 f) Sim
 g) Sim
 h) Sim
 i) Não
- 8) a) Falsa
 b) Falsa
 c) Verdadeira
 d) Falsa
 e) Falsa
 f) Verdadeira
 g) Falsa
 h) Falsa
 i) Falsa
 j) Falsa
 k) Falsa
 l) Verdadeira
 m) Falsa
 n) Falsa
- 9) a) Falsa
 b) Verdadeira
 c) Falsa
 d) Verdadeira
 e) Verdadeira
 f) Verdadeira
 g) Verdadeira
 h) Falsa
 i) Verdadeira
 j) Verdadeira
 k) Falsa
 l) Verdadeira
 m) Verdadeira
 n) Verdadeira
 o) Falsa
 p) Falsa

46 ... LÓGICA PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

- q) Verdadeira
r) Falsa
- 10) a) H é contraditória $\Leftrightarrow \forall \text{ int. } I, I[H]=F$
 $\Leftrightarrow \forall \text{ int. } I, I[H \rightarrow G]=T$
 $\Rightarrow (H \rightarrow G)$ é válida.
- b) H é tautologia e G é contraditória
 $\Leftrightarrow \forall \text{ int. } I, I[H]=T$ e $\forall \text{ int. } I, I[G]=F$
 $\Rightarrow \forall \text{ int. } I, I[H \rightarrow G]=F$
 $\Rightarrow (H \rightarrow G)$ é contraditória.
- c) Falso nos dois casos.
- 13) a) Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
- 14) Não
- 15) a) Não é satisfável.
b) Satisfável
c) Satisfável
d) Satisfável
e) Satisfável
f) Satisfável
g) Não é satisfável
- 16) a) Não
b) Não
c) Sim
- 17) O conjunto não é satisfável. Suponha que $\{\neg G, E \rightarrow \neg H, H\}$ seja satisfável. Logo, \exists int. $I; I[\neg G]=I[E \rightarrow \neg H]=I[H]=T$. Mas se $I[H]=T$, como H implica G, então $I[G]=T$, o que é um absurdo pois $I[\neg G]=T$.
- 18) a) Considere as associações: P = Marcos está feliz, Q = Sílvia foi ao baile, R = Marcos foi ao baile. O conjunto é representado pelo conjunto de fórmulas
- $$\{\neg P \vee (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, R \rightarrow Q\}$$