Lista 4

Exercícios

Demonstre, utilizando qualquer um dos métodos estudados neste capítulo, que as fórmulas a seguir são tautologias.

Leis de negação.

1) $(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$, $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \land (\neg G))$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$

Leis de definição de conectivos.

2) $(H \lor G) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow G)$, $(H \lor G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$, $(H \land G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$
3) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \lor G)$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(H \land \neg G)$,
4) $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \land G))$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg G \rightarrow \neg H)$

5) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$,
6) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (\neg H \wedge \neg G))$

Leis de distributividade.

7) $(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$, $(H \vee (G \wedge E)) \leftrightarrow ((H \vee G) \wedge (H \vee E))$

Leis de comutatividade.

8) $(H \wedge G) \leftrightarrow (G \wedge H)$, $(H \vee G) \leftrightarrow (G \vee H)$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$

Leis de associatividade.

9) $((H \wedge G) \wedge H) \leftrightarrow (H \wedge (G \wedge H))$, $((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee H))$,
$((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$

Leis de transitividade.

10) $((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$, $((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
11) $(H \vee (H \wedge G)) \leftrightarrow H$, $(H \vee (H \wedge G)) \leftrightarrow H$.

Outras leis.

12) $(\neg H) \vee H$, $H \rightarrow H$, $H \leftrightarrow H$, $H \leftrightarrow (H \wedge H)$, $H \leftrightarrow (H \vee H)$, $H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$,
$H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$
13) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H) \leftrightarrow (\neg G))$, $((H \wedge G) \rightarrow H) \leftrightarrow (H \rightarrow (G \rightarrow H))$, $H \rightarrow (G \rightarrow (H \rightarrow H))$
14) $H \rightarrow (H \vee G)$, $(H \wedge G) \rightarrow H$

Leis dos valores de verdade.

15) $(\neg \textit{true}) \leftrightarrow \textit{false}$, $(\neg \textit{false}) \leftrightarrow \textit{true}$, $(H \wedge \textit{true}) \leftrightarrow H$, $(H \wedge \textit{false}) \leftrightarrow \textit{false}$,
$(H \vee \textit{true}) \leftrightarrow \textit{true}$
16) $(H \vee \textit{false}) \leftrightarrow H$, $(H \rightarrow \textit{false}) \leftrightarrow (\neg H)$, $(H \rightarrow \textit{true}) \leftrightarrow \textit{true}$, $(\textit{true} \rightarrow H) \leftrightarrow H$
17) $(\textit{false} \rightarrow H) \leftrightarrow \textit{true}$, $H \leftrightarrow (\textit{true} \leftrightarrow H)$, $H \leftrightarrow (\textit{false} \leftrightarrow (\neg H))$
18) Considere G uma das fórmulas indicadas a seguir.
   a) $\neg P \vee Q$
   b) $\neg Q \rightarrow P$
   c) $P \leftrightarrow Q$
   d) $P \rightarrow Q$
   e) $\neg Q \rightarrow \neg P$
   f) $P \wedge \neg Q$

   Determine, utilizando o método da negação ou absurdo, os casos em que:
   i) $(P \wedge Q)$ implica G
   ii) $(P \rightarrow Q)$ implica G
   iii) $(P \vee Q)$ implica G
   iv) $(P \leftrightarrow Q)$ implica G
19) Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias.
   $H = P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_3 \rightarrow (P_4 \rightarrow (P_5 \rightarrow (P_6 \rightarrow (P_7 \rightarrow P_1))))))$
   G: $(((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$
   $E = P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8)))$

20) Considere a fórmula H,

$$H = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

a) Construa uma árvore semântica associada a H e identifique se H é uma tautologia, é satisfatível ou contraditória.
b) Quantas linhas tem a tabela verdade associada a H?

21) a) Demonstre, utilizando o método da negação ou absurdo, se as fórmulas a seguir são tautologias ou não.

$$G = (\neg P \to Q) \to ((\neg Q \to P) \wedge (P \vee Q))$$
$$H = (P \to (Q \to R)) \to ((P \wedge Q) \to R)$$
$$G = H \leftrightarrow (H \vee G)$$

b) Na demonstração que G não é tautologia, quando se considera I[H] = T, obtém-se absurdo. Mas quando I[H] = F não é observado nenhum absurdo. Comente o significado de tais fatos.

22) Considere as fórmulas H a seguir:

$$H = (P \wedge Q) \to (R \wedge S)$$
$$H = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

a) Construa a árvore semântica associada a cada fórmula H.
b) Identifique, a partir da árvore semântica determinada no item anterior, uma interpretação I tal que I[H] = F e uma interpretação J tal que J[H] = T.

23) a) Considere as fórmulas a seguir:

$$H = (\neg(P \vee \neg Q) \vee R) \vee (R \to (Q \to P))$$
$$E = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \to P_1)) \to ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \wedge R) \leftrightarrow R) \to P)$$
$$G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Utilize o método da negação ou absurdo para demonstrar se tais fórmulas são tautologias. No caso em que a fórmula não for uma tautologia, utilize o resultado do método para identificar uma interpretação, que interpreta a fórmula como sendo falsa.

b) Suponha que I[P]=T, o que se pode concluir a respeito de I[H], I[G], onde

$$H = ((((P \wedge S) \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_3 \to P_4)) \to ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P_1) \wedge ((P_5 \wedge R_1) \leftrightarrow R) \to P)) \to ((P_4 \wedge P) \leftrightarrow P_4)$$

$$G = (((R \vee (S \leftrightarrow P_1)) \to ((P_2 \vee S_1) \leftrightarrow R_3)) \to P) \wedge (\neg P \leftrightarrow (\neg P \to ((R_5 \to P) \leftrightarrow (S \wedge P))))\ ?$$

24) (Alírio indeciso) Considere as três afirmações a seguir.

H_1: Se Alírio toma vinho e o vinho está ruim, ele fica com ressaca.

H_2: Se Alírio fica com ressaca, então ele fica triste e vai para casa.

H_3: Se Alírio vai ao seu encontro romântico com Virgínia ou ele fica triste e vai para casa.

Suponha que as três afirmações anteriores são verdadeiras. A partir deste fato, qual das afirmações a seguir também é verdadeira.

G_1: Se Alírio toma vinho e este está ruim, então ele perde seu encontro romântico com Virgínia.

G_2: Se Alírio fica com ressaca e vai para casa, então ele não perde seu encontro romântico com Virgínia.

G_3: Se o vinho está ruim, então Alírio não o toma ou ele não fica com ressaca.

G_4: Se o vinho está ruim ou Alírio fica com ressaca, então ele fica triste.

G_5: Se Alírio toma vinho e vai para casa, então ele não fica triste se o vinho está ruim.

25) (Grandes amores) Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder as seguintes questões.

i) Suponha que as duas afirmações, a seguir, são verdadeiras.

1) Ricardo ama Lúcia ou Elaine.
2) Se Ricardo ama Lúcia, então ele também ama Elaine.

Conclui-se, necessariamente, que Ricardo ama Lúcia?

Conclui-se, necessariamente, que Ricardo ama Elaine?

ii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta ao Ricardo:

a) "É realmente verdade que se você ama Lúcia, então você também ama Elaine?"

Suponha que Ricardo responda o seguinte:

b) "Se isto é verdade, então amo Lúcia."

Conclui-se deste diálogo que Ricardo ama Lúcia?

Conclui-se deste diálogo que Ricardo ama Elaine?

iii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta ao Ricardo.

a) "É realmente verdade que se você ama Lúcia, então você também ama Elaine?"

Suponha que Ricardo responda o seguinte:

b) "Se isto é verdade, então amo Lúcia e se eu amo Lúcia, então isto é verdade."

Conclui-se deste diálogo que Ricardo necessariamente ama Lúcia?

Conclui-se deste diálogo que Ricardo necessariamente ama Elaine?

iv) Suponha que Clotilde, aquela que sabe da vida de todos, faça as seguintes afirmações.

Com certeza Ricardo ama Lúcia e Elaine.

É possível a partir da afirmação de Clotilde concluir a afirmação a seguir?

Dizer que Ricardo ama Lúcia equivale a dizer que
se Ricardo ama Lúcia então ele também ama Elaine.

v) Suponha que Clotilde modifique sua opinião e afirme que
Ricardo ama Lúcia ou Elaine.

Pode-se concluir que a afirmação de Clotilde equivale à afirmação a seguir?

Se Ricardo não ama Lúcia então ele ama Elaine.

vi) A partir deste instante, há mais uma pessoa, a Patrícia. Há três meninas: Lúcia, Elaine e Patrícia. Suponha que os fatos sejam verdadeiros.

a) Ricardo ama pelo menos uma das três meninas.
b) Se Ricardo ama Lúcia, mas não ama Patrícia, então ele também ama Elaine.
c) Ricardo ama Patrícia e Elaine ou não ama nenhuma das duas meninas.
d) Se Ricardo ama Patrícia, então ele também ama Lúcia.

A partir destes fatos, qual das meninas Ricardo necessariamente ama?

26) Considere as sentenças a seguir:

H_1: Se Adriane não é inteligente, então Joyce é linda.

H_2: Se Joyce não é loura, então Érica é interessante.

H_3: Se Érica é linda ou interessante, então Adriane é inteligente.

H_4: Se Luciana não é inteligente, então Érica é interessante.

H_5: Se Luciana é linda, então Érica é interessante.

c) Se Fernandinho (aquele das Alagoas) ganhar as eleições, a corrupção aumentará se a impunidade permanecer alta. Se Fernandinho ganhar as eleições, a impunidade permanecerá alta. Portanto, se Fernandinho ganhar as eleições, a corrupção aumentará.

d) Se os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, os gastos da prefeitura aumentarão ou crescerá o desemprego. Se os gastos da prefeitura não aumentarem, os impostos municipais poderão ser reduzidos. Se os impostos municipais forem reduzidos e os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, não haverá desemprego. Portanto, os gastos da prefeitura não aumentarão.

e) Se x é positivo, então y é negativo. Se z é negativo, então y é negativo. Portanto, se x é positivo ou z é negativo, então y é negativo.

f) Se Dázio ama Carmem e Carmem é bonita, inteligente e sensível, então Dázio é feliz. Logo, se Dázio não é feliz, então Carmem não é bonita, inteligente e sensível.

g) Se Katielly está bonita, então Tony está feliz e se Tony está feliz, Danillo está preocupado. Se Danillo está preocupado, então Katielly está bonita. Portanto, não é verdade que se Danillo está preocupado, então Tony está feliz.

32) Considere o seguinte conjunto de argumentos:

Se Godofredo ama Gripilina.

então é possível concluir que:

Se Gripilina é bonita, inteligente e sensível,

então Godofredo é feliz.

Demonstre, utilizando conceitos da Lógica Proposicional, se a partir do conjunto de argumentos acima, podemos concluir que:

Godofredo não ama Gripilina ou

Gripilina não é bonita, não é inteligente e nem sensível ou

Godofredo é feliz.

33) Considere cinco alunas de Ciência da Computação: Letícia, Fernanda, Flávia, Lívia, Marília e as afirmações

a) Se Letícia não é linda, Fernanda não é inteligente.

b) Se Flávia não é sensível, Lívia é charmosa.

c) Se Marília é sensível, Letícia não é linda.

d) Se Lívia é charmosa, Fernanda é inteligente.

e) Flávia e Marília possuem as mesmas qualidades.

f) Se Fernanda não é linda, Lívia não é charmosa.

Encontre, pelo menos um conjunto de qualidades para quatro meninas, que sejam coerentes com as afirmações.

34) Jânio e Nicanor, sergipanos autênticos, afirmam o seguinte.

Jânio: Se o que vale é a emoção, então vivo a vida.

Nicanor: O que vale é a emoção e não vivo a vida.

Qual das duas situações ocorre?

a) As afirmações de Jânio e Nicanor são equivalentes.

b) A afirmação de Nicanor equivale à negação da afirmação de Jânio.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

19) Utilizando o método da negação ou absurdo, tem-se.

$$H = P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_3 \rightarrow (P_4 \rightarrow (P_5 \rightarrow (P_6 \rightarrow (P_7 \rightarrow P_1))))))$$

T F T F T F T F T F T F T F $T_{F\ \text{absurdo}}$

Portanto, H é tautologia.

$$G: (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$$

F F T F T F T F F F T F T F T F F

Independente da interpretação dos símbolos S, P_1, Q e R não há absurdo, logo G não é tautologia.

23) a) Considere a fórmula

$$G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

F F F F TF F F

G não é uma tautologia. Dado I tal que I[P]=F e I[Q]=F, então I[G]=F. Os valores de verdade de P e Q estão abaixo dos símbolos P e Q respectivamente.

b) I[H]=T.

24) Traduza os fatos para a linguagem da Lógica Proposicional. Considere, por exemplo, as correspondências P_1 = Alírio toma vinho, P_2 = Alírio fica com ressaca, Determine correspondências para todos os fatos. Utilizando tais correspondências, defina as fórmulas da lógica proposicional $H_1, H_2, H_3, G_1, ..., G_5$. O conjunto de fórmulas $\{H_1, H_2, H_3\}$ implica em uma fórmula G_i se e somente se a fórmula $(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \rightarrow G_i$ é uma tautologia. Quando isto ocorre, se H_1, H_2 e H_3 são verdadeiras, então G_i também é verdadeira.

25) i) Considere as associações: P = Ricardo ama Lúcia, Q = Ricardo ama Elaine

$$((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow P$$

F T T T F T F F

Como não há absurdo, então Ricardo não necessariamente ama Lúcia.

$$((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$$

F F F T_F F T F F F

Como há absurdo, então Ricardo necessariamente ama Elaine.

iii)

$$(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow P$$

F F_T T F T F T F F

Como há absurdo, então Ricardo necessariamente ama Lúcia.

$$(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow Q$$

F T T T F F F

Há dois casos a considerar. I[P]=T ou I[P]=F

$$(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow (P \rightarrow Q))) \rightarrow Q$$

F T F T_F F T T F F F

Se I[P]=F, ocorre absurdo.

$$(((P \to Q) \to P) \land (P \to (P \to Q))) \to Q$$
$$\text{T F F} \quad \text{T T} \quad \text{T T T} \quad \text{T F F} \qquad \text{F} \quad \text{F}$$

Se I[P]=T, também ocorre absurdo. Portanto, Ricardo necessariamente ama Elaine.

iv) Neste caso, o diálogo é expresso por $(P \lor Q) \to (P \leftrightarrow (P \to Q))$

v) Neste caso, o diálogo é expresso por $(P \lor Q) \leftrightarrow (P \to Q)$

29) Considere as associações: P = há sangue na cena do crime, Q = o matador é um profissional.

Ana: $P \to Q$

Teresa: $\neg(P \land \neg Q)$

Cynthia: $\neg Q \land P$

Melo: P

a) O conjunto de conclusões não é satisfatível.

b) Basta determinar se $(\neg(P \land \neg Q) \land P) \to Q$ é uma tautologia.

c) Basta determinar se $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \land \neg Q)$ é uma tautologia.

30) Transforme a afirmações para fórmulas da lógica proposicional. Em seguida, identifique a validade das implicações.

31) a) Considere as associações: P = os investimentos de capital permanecerão constantes, Q = os gastos do governo aumentarão, R = crescerá o desemprego. S = os impostos poderão ser reduzidos. A representação na Lógica Proposicional é a seguinte:

$$((P \to (Q \lor R)) \land (\neg Q \to S) \land ((S \land P) \to \neg R)) \to Q$$
$$\text{F T} \quad \text{F} \qquad \text{T} \quad \text{TF T T T} \quad \text{T F F} \quad \text{T} \qquad \text{F F}$$

Como não há absurdo, os argumentos não são válidos.