Lista 5

Exercícios

1. Demonstre se os argumentos a seguir são válidos (estes argumentos foram freqüentemente utilizados pelos americanos na guerra do Vietnã).

   Uma condição necessária e suficiente para que os comunistas conquistem o Vietnã é que o Camboja e a Tailândia também sejam conquistados.

   Para a conquista de toda Ásia pelos comunistas é suficiente que o Camboja e a Tailândia sejam conquistados.

   Vietnã não será conquistado pelos comunistas se os americanos permanecerem por lá.

   Os comunistas não devem conquistar toda a Ásia.

   Portanto, os americanos não devem sair do Vietnã.

2. Demonstre que a primeira forma do princípio da indução finita é equivalente à segunda forma.

3. Este exercício considera uma demonstração que utiliza o princípio da indução. É demonstrado que os elementos de qualquer conjunto são iguais entre si. Evidentemente esta demonstração está errada, pois é falso que os elementos de qualquer conjunto são iguais entre si. Identifique o ERRO da seguinte demonstração.

   Seja $A(n)$ a asserção a seguir.

   $$A(n) = \text{“n elementos quaisquer são iguais entre si”}.$$

   É demonstrado que para todo inteiro n, $A(n)$ é uma asserção verdadeira. Nesta demonstração, a primeira forma do princípio da indução finita é utilizada.

   Base da indução: $A(1)$ é verdadeiro, pois o elemento de qualquer conjunto unitário é igual a ele próprio. Isto é, um elemento é igual a si próprio.

   Passo da indução: Suponha que a hipótese de indução é verdadeira. Isto é, $A(n)$ é verdadeira para um inteiro fixo $n \geq 1$. Em outras palavras, dado um conjunto, se este conjunto possui n elementos, então tais elementos são iguais entre si. Em seguida a asserção $A(n+1)$ é demonstrada. Isto é, todo conjunto com $(n+1)$ elementos é tal que todos os seus elementos são iguais entre si. Considere um conjunto qualquer $\Phi = \{a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}\}$ com $(n+1)$ elementos. É demonstrado a seguir que os elementos de Φ são iguais entre si. Sejam ψ e Ω os conjuntos a seguir $\psi = \{a_1,\ldots,a_n\}$ e $\Omega = \{a_2,\ldots,a_{n+1}\}$. O conjunto ψ é formado pelos n primeiros elementos de Φ e o conjunto Ω é formado pelos n últimos elementos de Φ. Como ψ e Ω possuem n elementos, então, conforme a hipótese de indução, tais elementos são iguais entre si. Logo, $a_1=\ldots=a_n$ e $a_2=\ldots=a_{n+1}$. Mas a partir destas igualdades conclui-se que $a_1=\ldots=a_1=a_{n+1}$. Isto é, todos os elementos de Φ são iguais entre si. Como Φ é um conjunto qualquer com n+1 elementos, então $A(n+1)$ é verdadeira. Logo, o passo da indução é verdadeiro.

   Como a base da indução e o passo da indução são verdadeiros, então a asserção $A(n)$ é verdadeira para todo n. Ou seja, para todo inteiro n, se Φ é um conjunto com n elementos, então tais elementos são iguais entre si. Isto é, n elementos quaisquer são iguais entre si.

   Encontre o erro da demonstração.

4. Demonstre, utilizando o princípio da indução, que

   a) Para todo número natural n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

   b) Para todo número natural n, 3 divide $n^3 - n$.

   c) Para todo número natural n tal que $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

   d) Para todo número natural n tal que $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

   e) Para todo número natural n, n é primo ou é produto de primos.

5) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que o número de parênteses contidos em uma fórmula H é um número par (para cada "abre" parênteses há um "fecha" parêntese).

6) Considere E uma fórmula que contém somente conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

   a) Seja $\alpha(E)$ o número de conectivos contidos em E e $\beta(E)$ o número de símbolos proposicionais e de verdade. Demonstre, utilizando o princípio da indução, que $\beta(E) = \alpha(E) + 1$

   b) Demonstre que comp[E] é um número ímpar.

7) Dada uma fórmula E, se A é uma subfórmula de E, demonstre, utilizando indução finita, que

$$\text{comp}[A] \leq \text{comp}[E]$$

8) Considere uma função f, definida no alfabeto da Lógica Proposicional, tal que

$$f(\neg) = 0,\ f(\vee) = 0,\ f(\wedge) = 0,\ f(\rightarrow) = 0,\ f(\leftrightarrow) = 0$$
$$f(P) = 0,\ \text{para todo símbolo proposicional}$$
$$f(\mathit{true}) = f(\mathit{false}) = 0$$
$$f(\,(\,) = 1$$
$$f(\,)\,) = -1$$

Além disso, dada uma concatenação de símbolos $S_1, \ldots, S_n$, então

$$f(S_1 \ldots S_n) = f(S_1) + \ldots + f(S_n)$$

Demonstre, utilizando o princípio da indução, que para qualquer fórmula E da Lógica Proposicional, $f(E) = 0$.

9) Considere uma função f, definida no alfabeto da Lógica Proposicional, tal que

$$f(\neg) = 0,\ f(\vee) = 2,\ f(\wedge) = 4,\ f(\rightarrow) = 6,\ f(\leftrightarrow) = 8$$
$$f(P) = 0,\ \text{para todo símbolo proposicional}$$
$$f(\mathit{true}) = f(\mathit{false}) = 4$$
$$f(\,(\,) = 5$$
$$f(\,)\,) = -5$$

Além disso, dada uma concatenação de símbolos $S_1, \ldots S_n$, então

$$f(S_1 \ldots S_n) = f(S_1) + \ldots + f(S_n)$$

Demonstre, utilizando o princípio da indução, que

   a) para qualquer fórmula E da Lógica Proposicional, f(E) é um número par.

   b) para qualquer fórmula E da Lógica Proposicional, se A é subfórmula de E, ent... $f(A) \leq f(E)$.

   c) Redefina a função f para demonstrar que para qualquer fórmula E, seu número de a... parênteses é igual ao número de fecha parênteses.

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2) Neste exercício, é necessário demonstrar que a implicação expressa pela primeira forma do princípio da indução finita implica a implicação expressa pela segunda forma e vice-versa. Há duas implicações, que podem ser representadas como se segue:

$$\text{Primeira forma: } A \Rightarrow B.$$
$$\text{Segunda forma: } C \Rightarrow B.$$

Observe que o conseqüente destas implicações coincide. Para demonstrar que $(A \Rightarrow B)$ implica $(C \Rightarrow B)$, basta demonstrar que C implica A. Por outro lado, para demonstrar que $(C \Rightarrow B)$ implica $(A \Rightarrow B)$ é necessário demonstrar que A implica C.

A primeira forma é dada pela implicação $[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)$
e a segunda forma pela implicação $[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)$.
Demonstre que

$$\{[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)\} \text{ implica } \{[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)\}$$

A demonstração desta implicação equivale à demonstração de

$$\{[[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)] \wedge [\text{base2} \wedge \text{passo2}]\} \text{ implica } \forall\ n\ A(n)$$

Para demonstrar a implicação acima, suponha inicialmente as afirmações

$$[[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)] \text{ e } [\text{base2} \wedge \text{passo2}]$$

e é demonstrado que $\forall\ n\ A(n)$. Neste caso, como se tem $[\text{base2} \wedge \text{passo2}]$, então é necessário demonstrar que

$$[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \text{ implica } [\text{base1} \wedge \text{passo1}]$$

concluindo $[\text{base1} \wedge \text{passo1}]$. Mas como $[\text{base1} \wedge \text{passo1}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)$
logo, a partir de $[\text{base1} \wedge \text{passo1}]$, conclui-se $\forall\ n\ A(n)$. É demonstrado a seguir que

$$[\text{base2} \wedge \text{passo2}] \text{ implica } [\text{base1} \wedge \text{passo1}]$$

Como base1 = base2, basta demonstra que passo2 implica passo1. Mas
Passo1 = "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$"
Passo2 = "$A(k)$ para k; $1 \leq k \leq n$, $\Rightarrow A(n+1)$"
Logo, deve demonstrar que

$$\text{“}A(k) \text{ para } k;\ 1 \leq k \leq n, \Rightarrow A(n+1)\text{” implica “}A(n) \Rightarrow A(n+1)\text{”}$$

que equivale a demonstrar que

$$\text{“}A(k) \text{ para } k;\ 1 \leq k \leq n, \Rightarrow A(n+1)\text{” e “}A(n)\text{” implicam } A(n+1)\text{”}$$

Supondo "$A(k)$ para k; $1 \leq k \leq n$, $\Rightarrow A(n+1)$" e "$A(n)$" e fazendo $k = n$ conclui-se $A(n+1)$

3) Observe que é falso que $A(1) \Rightarrow A(2)$. Portanto o passo da indução não é válido.

5) Dada uma fórmula E, considere $\alpha(E)$ o número de parênteses de E. Deve se demonstrar que $\forall$ fórmula E, $\alpha(E)$ é par. Seja então $B[E]$ = "$\alpha(E)$ é par". Utilizando o princípio da indução, para demonstrar $\forall$ fórmula E $B[E]$, basta demonstrar a base e o passo da indução na lógica.
Base da indução.