Lista 6

Exercícios

1) Demonstre que as fórmulas H e G são equivalentes.

$H = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

$G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$

2) Considere as afirmações a seguir. Demonstre quando elas forem verdadeiras ou dê uma justificativa quando forem falsas.

a) $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q.
b) $(P \wedge Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q.
c) $(P \leftrightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q.
d) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\vee$ e P.
e) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\wedge$ e P.
f) $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q.
g) $(P \wedge Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q
h) $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q.
i) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e P.

3) Considere os conjuntos de conectivos.

$\{\vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\rightarrow, \vee\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\rightarrow\}$, $\{\leftrightarrow\}$, $\{\rightarrow, \wedge\}$, $\{\leftrightarrow, \wedge\}$ e $\{\leftrightarrow, \vee\}$

a) Identifique quais conjuntos são completos. Para identificar se um conjunto é completo, estabeleça as regras de conversão dos conectivos.
b) No caso dos conjuntos completos, demonstre, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos do conjunto e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

4) Considere o conectivo nor definido pela correspondência: $(P \textit{ nor } Q) = \neg(P \vee Q)$

a) Construa a tabela verdade para o conectivo nor.
b) Siga os passos determinados neste capítulo e defina um conjunto de procedimentos que possibilite transformar uma fórmula H em outra equivalente, mas que contém apenas o conectivo nor e os símbolos de verdade e proposicionais de H.
c) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo nor e os símbolos proposicionais e de verdade de H.
d) Repita este exercício considerando o conectivo definido pela correspondência $(P \textit{ nnse } Q) = \neg(\neg P \rightarrow Q)$
e) Repita este exercício considerando o conectivo definido pela correspondência $(P \textit{ nnse } Q) = \neg(P \rightarrow \neg Q)$

5) Demonstre a validade das fórmulas a seguir.

a) $\neg P \leftrightarrow (P \textit{ nand } P)$
b) $(P \vee Q) \leftrightarrow P \textit{ nand } \neg Q)$

6) Termine a demonstração da proposição que trata da relação semântica entre os conectivos, considerando as asserções $B[G \wedge H]$, $B[G \rightarrow H]$ e $B[G \leftrightarrow H]$.

7) Demonstre o novo princípio da indução.

Seja B[E] uma asserção que se refere às fórmulas E da lógica. Se as duas propriedades c) e d), a seguir, são verdadeiras, então conclui-se que B[E] é verdadeira para qualquer fórmula E.

c) Base da indução. B[P] é verdadeira para todo símbolo proposicional. B[*false*] é verdadeira.

d) Passo da indução. Sejam G e H duas fórmulas. Se B[G] e B[H] são verdadeiras, então $B[G \vee H]$ e $B[\neg G]$ são verdadeiras.

Observe que neste caso as propriedades c) e d) são análogas às propriedades a) e b) do princípio da indução na lógica, respectivamente. Entretanto, nas propriedades c) e d) são considerados apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e o símbolo de verdade *false*.

8) Considere as fórmulas:

$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge P)$

$G = (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$

$E = (P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \rightarrow \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$

Determine as fnd's e as fnc's associadas a H, G e E.

9) a) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que toda fórmula da Lógica Proposicional é equivalente a uma fórmula fnd.

b) Demonstre, utilizando o princípio da indução, que toda fórmula da Lógica Proposicional é equivalente a uma fórmula fnc.

10) Considere as funções de verdade unárias h_1, h_2, h_3, e h_4, indicadas a seguir.

h_1 (T) = T. h_1 (F) = T.

h_2 (T) = T. h_2 (F) = F.

h_3 (T) = F. h_3 (F) = T.

h_4 (T) = F. h_4 (F) = F.

a) As funções de verdade acima podem ser representadas por fórmulas da Lógica Proposicional que possuem a mesma tabela verdade. Tem-se

P	h_3	$\neg P$
T	F	F
F	T	T

Como as colunas de $\neg P$ e h_3 coincidem, então $\neg P$ representa a função h_3. Identifique as fórmulas que representam as outras funções.

a) Determine todas as funções de verdade binárias sobre os valores de verdade. Entre tais funções há, por exemplo, a função g(X,Y) definida a seguir: g(T,T) = T, g (T,F) = F, g(F,T) = T e g(F,F) = T.

b) Determine as fórmulas associadas às funções de verdade binárias. A fórmula associada à função g(X, Y) acima é $(P \rightarrow Q)$ pois as colunas de g e de $(P \rightarrow Q)$, na tabela verdade a seguir coincidem.

P	Q	g	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

c) Represente todas as funções de verdade binárias utilizando os conectivos $\neg$ e $\vee$. Isto significa que todas as funções de verdade binárias podem ser representadas utilizando composições das funções associadas aos conectivos $\neg$ e $\vee$.

d) É possível identificar uma função de verdade binária h, tal que todas as outras podem ser representadas como composições de h.

e) Qual o número de funções de verdade n-árias?

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

2) Todos os itens deste exercício podem ser resolvidos utilizando os passos da solução do item a).

a) Construa inicialmente uma tabela verdade com os símbolos P e Q. Esta tabela deve conter 4 linhas, uma coluna para P e outra para Q. Adicione, completando a tabela, uma coluna para cada uma das fórmulas $P \to Q$, $Q \to P$, $P \to (P \to Q)$, $P \to (Q \to P)$, $Q \to (P \to Q)$, $Q \to (Q \to P)$, $(P \to Q) \to P$, $(P \to Q) \to Q$, $(Q \to P) \to P$, $(Q \to P) \to Q$ etc., etc,... Observe que se considera todas as fórmulas construídas a partir de P e Q utilizando o conectivo $\to$. Há infinitas fórmulas. Mas, o número máximo de colunas em uma tabela com 4 linhas é 16 (justifique), logo muitas fórmulas têm colunas idênticas pois são equivalentes. Neste caso, o número de colunas obtidas é menor que 16. $P \vee Q$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\to$ se alguma coluna da tabela for igual à coluna de $P \vee Q$.

b) Análoga à solução de a).

c) Análoga à solução de a).

d) Pode ser resolvido utilizando os passos do item a). Mas há uma solução mais simples. Se $I[P]=T$, então $I[\neg P]=F$. Mas, se $I[P]=T$, então qualquer fórmula H que contém apenas P e $\vee$ é tal que $I[H]=T$. Não é possível negar P utilizando apenas P e $\vee$.

e) Análoga à solução do item d).

f) Análoga à solução do item a, trocando $\to$ por $\leftrightarrow$.

g) Análoga à solução do item f).

h) Análoga à solução do item f).

I) Análoga à solução do item d).

3) a) Utilize os resultados do exercício anterior.

b) Siga os passos da demonstração da proposição, que demonstra, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas os conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

4) c) Análoga à demonstração da proposição que demonstra, utilizando o princípio da indução, que qualquer fórmula H pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo *nand* e os símbolos proposicionais e de verdade de H.

7) Esta demonstração segue os princípios da demonstração do exercício 1 do Capítulo 5. Observe inicialmente que a primeira forma do princípio da indução implica o princípio da indução na lógica. Demonstre que o princípio da indução na lógica implica o novo princípio da indução. O princípio da indução na lógica é dado pela implicação

$$[\text{base-lógica} \wedge \text{passo-lógica}] \Rightarrow \forall \text{ fórmula E } B[E]$$

e o novo princípio da indução é

$$[\text{base-nova} \wedge \text{passo-novo}] \Rightarrow \forall \text{ fórmula E } B[E].$$

Deve-se demonstrar que

{[base-lógica ∧ passo-lógica] ⇒ ∀ fórmula B[E]} implica
{[base-nova ∧ passo-novo] ⇒ ∀ fórmula E B[E]}

De forma inteiramente análoga àquela considerada no exercício 1 do Capítulo 5, a demonstração desta implicação equivale à demonstração de

[base-nova ∧ passo-novo2] implica [base-lógica ∧ passo-lógica]

Observe que neste caso base-nova está contida em base-lógica, como também passo-novo está contido em passo-lógica. Para demonstrar essa implicação utilize o fato de qualquer fórmula pode ser reescrita de forma equivalente utilizando apenas os conectivos ¬ e ∨.

9) a) Considere B[E] = "∃ fórmula Ef, tal que Ef equivale a E e Ef é fnd".
Utilize o princípio da indução na lógica simplificado para demonstrar que ∀ fórmula E, B[E].

10) e) Sim, a função associada ao conectivo nor ou ao conectivo *nand*.
f) É igual a 2n.