Lista 7

Exercícios

1) Dadas duas fórmulas H e G, demonstre que se H e G são tautologias, então o resultado da aplicação da regra Modus Ponens a H e G também é uma tautologia. Em outras palavras:

Se H e G são tautologias e $\dfrac{H,\ G}{E}$ MP
então E é uma tautologia.

Observação: Observe que a fórmula G é necessariamente do tipo: $G = H \rightarrow E$.

2) Responda, justificando nos sistemas Pa e Na.

a) Por que uma derivação é um procedimento puramente sintático?
b) Seja β um conjunto de fórmulas. Se $\beta \vdash H$, então é possível concluir que H é uma tautologia?
c) Seja β um conjunto de fórmulas. Considere que $\beta \vdash H$. Que condições o conjunto de fórmulas β deve satisfazer para que necessariamente H seja uma tautologia?
d) Se H é tautologia, então $\beta \vdash H$ para qualquer conjunto β.

3) Considere as afirmações a seguir nos sistemas Pa e Na. Demonstre quando forem verdadeiras ou caso contrário, dê um contra-exemplo.

a) Se $\beta \vdash H$ e $\beta \subset \varphi$, então $\varphi \vdash H$.
b) Se $\beta \vdash H$ e $\beta \supset \varphi$, então $\varphi \vdash H$.
c) Considere o sistema Na. Se $\beta \vdash H \land G$, então $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash G$.
d) Se $\beta \cup \{H\} \vdash H$ então $\beta \vdash H \rightarrow G$.
e) Se $\beta \vdash H$ e $\varphi \vdash H \rightarrow G$, então $\beta \cup \varphi \vdash G$.
f) Considere o sistema Na. Se $\beta \vdash$ *false* então $\beta \vdash H$.

g) Se $\beta \vdash$ *false* então β é insatisfatível.

h) Considere o sistema Na. Se $\beta \cup \{\neg H\} \vdash$ *false* então $\beta \vdash H$.

i) Se $\beta \cap \varphi \vdash H$, então $\varphi \vdash H$.

j) Se $\beta \cup \varphi \vdash H$, então $\varphi \vdash H$.

4) Considere os sistemas Pa e Na. Existe conjunto de fórmulas β tal que $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash \neg H$ para alguma fórmula H? Isto é, H e ¬H são conseqüências lógicas de β.

5) Demonstre em Pa que $\vdash (\neg\neg P \rightarrow P)$.

6) Demonstre em Pa que se $\beta \vdash (A \vee B)$ então $\beta \vdash (B \vee A)$.

7) (Regra de Transitividade) Demonstre em Pa que se $\beta \vdash (H_1 \rightarrow H_2), \ldots, \beta \vdash (H_{n-1} \rightarrow H_n)$ então $\beta \vdash (H_1 \rightarrow H_n)$.

8) Considere um sistema axiomático Pb onde se tem Modus Ponens, a Regra da Substituição e $\vdash (H \rightarrow (H \rightarrow G))$. Demonstre que Pb é inconsistente.

9) Demonstre em Pa que $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

10) O comprimento de uma prova $\beta \vdash H$ em Pa é definido como o número de fórmulas da seqüência que define a prova. Se esta prova é $H_1, \ldots, H_n$, o seu comprimento é igual a n. Isto é comp$[\beta \vdash H] = n$.

a) Defina o princípio da indução finita em Pa, como o princípio da indução no comprimento da prova.

b) Demonstre a validade do princípio da indução em Pa.

11) Demonstre, no sistema Na, que

$\{ (\wedge I), (\wedge E), (\rightarrow I), (\rightarrow E), (\mathit{false}), (RAA) \} \Rightarrow \{ (\vee I), (\vee E), (\neg I), (\neg E), (\leftrightarrow I), (\leftrightarrow E) \}$

12) Demonstre em Na que $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

13) Demonstre em Na que $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

14) Demonstre em Na que $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$

15) Demonstre em Na que $\vdash \neg\neg P \rightarrow P$

16) Demonstre em Pa a regra da substituição utilizando o princípio da indução na Lógica.

17) a) O tamanho de uma prova em Na é o tamanho da derivação que define a prova. O tamanho de uma derivação em Na é definido como o número de símbolos proposicionais e de verdade presentes na derivação. Dada uma derivação D, defina recursivamente tam(D) como o tamanho de D.

b) Defina o princípio da indução finita em Na, como o princípio da indução em tam(D).

c) Demonstre a validade do princípio da indução em Na.

18) Complete e demonstre o teorema da correção em Pa, utilizando o princípio da indução no comprimento da prova.

19) Demonstre que as regras do sistema Na mantêm a validade das fórmulas.

20) Complete e demonstre o teorema da correção em Na, utilizando o princípio da indução no comprimento da prova.

21) Repita, passo a passo, a demonstração do teorema da completude em Pa no caso particular em que H contém apenas os símbolos proposicionais P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5

Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) É necessário demonstrar que se H e $H \rightarrow G$ são tautologias, então G é tautologia. Para demonstrar, basta utilizar a definição de tautologia.

$$H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow \forall \text{ int. } I[H] = T$$

$$H \rightarrow G \text{ é tautologia} \Leftrightarrow \forall \text{ int. I se } I[H]=T, \text{ então } I[G]=T$$

Portanto, $\forall$ int. I $I[H]=T$ e $\forall$ int. I se $I[H]=T$, então $I[G]=T$. Conclui-se que $\forall$ int. I $I[G]=T$. Portanto G é tautologia.

2) a) Não considera o significado das fórmulas.
   b) Não pois nem toda fórmula de β é uma tautologia.
   c) As fórmulas de β utilizadas na derivação $\beta \vdash H$ devem ser tautologias.
   d) Sim. Pelo teorema da completude $\vdash H$, logo $\beta \vdash H$ para qualquer conjunto β.

3) a) Suponha $\beta \vdash H$. Logo, existe uma prova de H a partir de β. Para demonstrar $\varphi \vdash H$ basta considerar a prova de H a partir de β. Como $\beta \subset \varphi$, esta prova demonstra que $\varphi \vdash H$.
   b) Falso pois se $\beta \vdash H$, então existe prova de H a partir de β. Como $\beta \supset \varphi$, então não necessariamente existe prova de H a partir de φ.
   c) Basta utilizar a regra ($\wedge$E).
   d) Utilizando o teorema da dedução este problema é escrito na forma: se $\beta \vdash H \rightarrow H$ então $\beta \vdash H \rightarrow G$, o que é falso. Observe que $H \rightarrow H$ pode ser uma conseqüência lógica de β sem que $H \rightarrow G$ seja uma conseqüência lógica de β.
   e) Se $\beta \vdash H$ e $\varphi \vdash H \rightarrow G$, então $\beta \cup \varphi \vdash H$ e $\beta \cup \varphi \vdash H \rightarrow G$. Utilizando a regra Modus Ponens, conclui-se $\beta \cup \varphi \vdash G$.
   f) Basta utilizar a regra (*false*).
   g) Suponha que β seja satisfatível. Logo $\exists$ interpretação I tal que $I[\beta]=T$. Mas se $\beta \vdash$ *false*, então $I[\mathit{false}]=T$, o que é absurdo. Portanto β é insatisfatível.
   h) Se $\neg H$ foi utilizado na prova de *false*, basta utilizar a regra (RAA).
   i) Se $\beta \cap \varphi \vdash H$, então como $(\beta \cap \varphi) \subset \varphi$ tem-se $\varphi \vdash H$.
   j) Falso.

4) Considere o caso em que $\beta = \{P, P \rightarrow Q\}$. Neste caso $\beta \vdash Q$. Substituindo Q por R obtém-se $\beta \vdash R$, o que é falso.

6) Sim. Neste caso o conjunto β deve ser insatisfatível. Basta considerar por exemplo $\beta = \{H, \neg H\}$

7) Considere o roteiro.

1.	$\vdash$	A×3, $H = \neg P$: $G = \neg\neg\neg P$ e $E = P$
2.	$\vdash$	pr3, pr4
3.	$\vdash$	MP, .1, .2
4.	$\vdash$	pr2
5.	$\vdash$	MP, .3, 4

8) Aplique a regra Modus Ponens na hipótese $\beta \vdash H \vee G$ e no resultado da proposição 6.

9) Este exercício é uma generalização da proposição 7. Utilize a indução finita para demonstrar este caso geral.

10) Como Pb é um sistema axiomático, ele contém pelo menos um axioma. Seja A um axioma de Pb, logo $\vdash A$. Seja B uma fórmula qualquer, então a partir de $\vdash (H \rightarrow (H \rightarrow G))$, utilizando a Regra da Substituição conclui também $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B))$ e $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$. Aplicando Modus Ponens a tais resultados e $\vdash A$, é possível concluir $\vdash B$ e $\vdash \neg B$. Portanto, Pb é inconsistente.

11) Consulte Mendelson, 1987, p. 32.

12) a) Considere o caso particular do princípio da indução onde A(n) = a asserção $B[\beta \vdash H]$ sobre a prova $\beta \vdash H$ é válida quando o $comp[\beta \vdash H] = n$.

b) Basta observar que neste caso $A(n)$ é um caso particular do caso mais geral considerado no princípio da indução.

13) Para demonstrar por exemplo $\{ (\wedge I), (\wedge E), (\rightarrow I), (\rightarrow E), (false), (RAA) \} \Rightarrow (\vee I)$ basta mostrar que o conseqüente de $(\vee I)$ pode ser deduzido de seu antecedente utilizando as regras do conjunto $\{(\wedge I), (\wedge E), (\rightarrow I), (\rightarrow E), (false), (RAA)\}$. De forma inteiramente análoga às outras implicações são demonstradas.

14) Inicie com as premissas P e $\neg\neg P$ e aplique a regra $(\rightarrow E)$ e obtenha *false*. Lembre que $\neg\neg P$ denota $\neg P \rightarrow false$. Em seguida aplique $(\rightarrow I)$ e obtenha $\neg P \rightarrow false$ eliminando a premissa $\neg P$. Em seguida aplique novamente $(\rightarrow I)$ obtendo $P \rightarrow \neg\neg P$ e eliminando a premissa P.

15) Inicie com a derivação $\{Q, D_1, P\}$ como premissa e aplique a regra $(\rightarrow I)$, eliminando Q e obtendo $Q \rightarrow P$. Em seguida aplique $(\rightarrow I)$ novamente, eliminado P e obtendo $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

16) Inicie com as premissas P e $\neg P$. Aplique a regra $(\rightarrow E)$, obtendo *false*. Lembre que $\neg P$ é uma denotação de $P \rightarrow false$. Em seguida aplique (*false*) e obtenha Q. Em seguida, aplique $(\rightarrow I)$ duas vezes obtendo $P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$ e eliminando as premissas.

17) Inicie com as premissas $\neg P$ e $\neg\neg P$. Aplique a regra $(\rightarrow E)$, obtendo *false*. Lembre que $\neg\neg P$ é uma denotação de $\neg P \rightarrow false$. Em seguida aplique (RAA) e obtenha P, eliminando a premissa $\neg P$. Em seguida, aplique $(\rightarrow I)$ e obtenha $\neg\neg P \rightarrow \neg P$ eliminando a outra premissa $\neg\neg P$.

18) Considere indução no comprimento da prova. O comprimento de uma prova Pa é definido como o número de fórmulas da seqüência que define a prova. Neste caso, seja $A(n)$ = Regra da Substituição válida quando o $comp[\beta \vdash H] = n$. Utilize a primeira forma do princípio da indução.

19) Este exercício é análogo ao exercício 11.

20) Considere $A(n)$ = o teorema da correção é válido para provas de comprimento n.

21) Para cada regra, demonstre que se seu antecedente é válido então o conseqüente também é válido.

22) Considere $A(n)$ = o teorema da correção é válido para provas de tamanho n.