# Lista 8



cuja expansão por resolução é:

| | | |
|---|---|---|
| .1 | $\{\neg P, Q\}$ | |
| .2 | $\{\neg Q\}$ | |
| .3 | $\{R\}$ | |
| .4 | $\{\neg R, P_1\}$ | |
| .5 | $\{P\}$ | |
| .6 | $\{P_1\}$ | |
| .7 | $\{Q\}$ | Res(.1,.5) |
| .8 | $\{\ \}$ | Res(.2,.7) |

A expansão obtida é fechada. Logo $\vdash H$ e pelo teorema da correção, H é uma tautologia. Portanto, $\beta$ é insatisfatível.

As provas por resolução são análogas às provas que utilizam tableaux semânticos. Nos dois casos é utilizado o método da negação ou absurdo. Na resolução, a obtenção da cláusula vazia corresponde à expansão fechada que é o dual do tableau semântico fechado. Tableau fechado é um conceito dual da expansão por resolução fechada. O que ocorre se não é possível obter uma expansão por resolução sobre $\neg H$ fechada? Neste caso, devido ao teorema da completude, H não é uma tautologia.

## Exercícios

1) Considere as regras $R_1,\ldots,R_9$ do tableau semântico. Demonstre que:
$\{R_1, R_2, R_5\} \Rightarrow \{R_3, R_4, R_7, R_8, R_9\}$

2) Faça duas demonstrações, uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.
Observação. Dada uma fórmula H, as duas primeiras propriedades são importantes na obtenção da forma clausal e das formas normais associadas a uma fórmula H.

a) $(H \land (G \lor H)) \leftrightarrow ((H \land G) \lor (H \land H))$
b) $(H \lor (G \land H)) \leftrightarrow ((H \lor G) \land (H \lor H))$
c) $(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$
d) $\neg(H \to G) \leftrightarrow (H \land (\neg G))$
e) $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$
f) $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$
g) $(H \lor G) \leftrightarrow (\neg H \to G)$
h) $(H \lor G) \leftrightarrow ((H \to G) \to G)$
I) $(H \land G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \to G))$
j) $(H \to G) \leftrightarrow (\neg H \lor G)$
k) $(H \to G) \leftrightarrow \neg(H \land \neg G)$
l) $(H \to G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \land G))$
m) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \to G) \land (G \to H))$
n) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \lor G) \land (H \lor \neg G))$
o) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \land G) \lor (\neg H \land \neg G))$
p) $(H \land G) \leftrightarrow (G \land H)$
q) $(H \lor G) \leftrightarrow (G \lor H)$
r) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$
s) $((H \land G) \land H) \leftrightarrow (H \land (G \land H))$

t) $((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee H))$
u) $((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$
v) $((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$
w) $((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
x) $(\neg H) \vee H$
y) $H \rightarrow H$
z) $H \leftrightarrow H$
aa) $H \leftrightarrow (H \wedge H)$
bb) $H \leftrightarrow (H \vee H)$
cc) $H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$
dd) $H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$
ee) $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H) \leftrightarrow (\neg G))$
ff) $((H \wedge G) \rightarrow H) \leftrightarrow (H \rightarrow (G \rightarrow H))$
gg) $H \rightarrow (G \rightarrow (H \rightarrow H))$
hh) $H \rightarrow (H \vee G), (H \wedge G) \rightarrow H$
ii) $(\neg true) \leftrightarrow false$
jj) $(\neg false) \leftrightarrow true$
kk) $(H \wedge true) \leftrightarrow H$
ll) $(H \wedge false) \leftrightarrow false$
mm) $(H \vee true) \leftrightarrow true$
nn) $(H \vee false) \leftrightarrow H$
oo) $(H \rightarrow false) \leftrightarrow (\neg H)$
pp) $(H \rightarrow true) \leftrightarrow true$
qq) $(true \rightarrow H) \leftrightarrow H$
rr) $(false \rightarrow H) \leftrightarrow true$
ss) $H \leftrightarrow (true \leftrightarrow H)$
tt) $H \leftrightarrow (false \leftrightarrow (\neg H))$

3) Faça duas demonstrações, uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e determine se os conjuntos de fórmulas são satisfatíveis.
a) $\{\neg(P \rightarrow Q), \neg P \vee Q\}$
b) $\{P \wedge Q, \neg P \wedge Q\}$
c) $\{P \wedge Q, \neg P \vee Q\}$
d) $\{P \rightarrow Q, P \vee Q, \neg Q\}$
e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow P\}$
f) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_4 \rightarrow P_1\}$
g) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, P_3 \leftrightarrow P_4, P_4 \rightarrow P_1\}$
h) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_1 \wedge \neg P_4\}$
I) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_1 \vee P_4\}$
j) $\{(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3, \neg P_1 \rightarrow P_4, P_2 \wedge \neg P_3 \wedge \neg P_4\}$
k) $\{P_1 \vee P_2, P_1 \vee (P_2 \wedge P_3), P_1 \rightarrow \neg P_3\}$
l) $\{\neg P_1 \vee P_2, P_2 \wedge \neg P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_5 \vee \neg P_4, P_1 \wedge \neg P_5\}$
m) $\{\neg P_2 \rightarrow \neg P_1, P_2 \rightarrow P_3, \neg P_4 \rightarrow \neg P_3, P_4 \wedge \neg P_1\}$
n) $\{P_1 \leftrightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, \neg P_3, \neg P_1\}$
o) $\{P_2 \rightarrow P_1, \neg P_2 \rightarrow P_1, P_1\}$
p) $\{P_2 \rightarrow P_1, \neg P_2 \rightarrow P_1, \neg P_1\}$

q) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_1 \rightarrow (P_2 \vee P_3), P_1, \neg P_3\}$

r) $\{P_1 \rightarrow P_2, P_1 \vee P_3 \vee P_4, \neg P_3 \vee (P_4 \wedge P_1), (P_3 \wedge \neg P_4) \rightarrow \neg P_5, \neg(\neg P_4 \rightarrow P_2)\}$

s) $\{\neg P_1 \wedge (\neg P_2 \vee P_3), P_2 \wedge P_3, P_3 \rightarrow P_4, P_4 \vee \neg P_1, \neg P_4 \wedge P_1\}$

t) $\{P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3, P_1 \vee \neg P_3, P_1 \rightarrow P_2\}$

u) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$

v) $\{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)\}$

w) $\{P, \neg P\}$

x) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P.), S\}$

y) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$

z) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$

aa) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$

bb) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$

4) Faça duas demonstrações. Uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e determine se cada conjunto de argumentos é satisfatível.

a) José não foi intimidado ou se Flávia faltou ao serviço, então um bilhete foi encontrado. Flávia não faltou ao serviço se José foi intimidado. Se um bilhete foi encontrado, então Flávia faltou ao serviço.

b) Um casamento é feliz se e somente se os noivos têm objetivos comuns. Os noivos têm objetivos comuns se e somente se os noivos cursam disciplinas em áreas comuns. Há divórcio se e somente se o casamento é infeliz. Há divórcio se e somente se os noivos não cursam disciplinas em áreas comuns.

c) Quatro detetives, João Paulo, Tiago, Paloma e Juliana, estão investigando as causas de um assassinato e cada um deles concluiu uma das afirmações a seguir:

João Paulo: Se há pouco sangue na cena do crime, o matador é um profissional.

Tiago: Houve poucos ruídos no momento do crime ou o matador não é um profissional.

Paloma: A vítima estava toda ensangüentada ou houve muitos ruídos no momento do crime.

Juliana: Houve pouco sangue na cena do crime.

d) Os quatro detetives do exercício anterior modificam suas opiniões e concluem.

João Paulo: Se há sangue na cena do crime, então o matador é um profissional.

Tiago: É falso que: há sangue na cena do crime e o matador não é um profissional.

Paloma: O matador não é um profissional e há sangue na cena do crime.

Juliana: Há sangue na cena do crime.

Além de determinar a satisfatibilidade dos argumentos, determine também.

- Se a partir das conclusões de Tiago e Juliana pode se concluir que o matador é profissional.
- Se as conclusões dos detetives João Paulo e Tiago são equivalentes.

5) Faça duas demonstrações. Uma utilizando tableaux semânticos e outra a resolução e determine se os argumentos são válidos?

a) Se a Marcinha emite um olhar 43 para o Tom, ele fica vermelho se e somente se o pessoal da sala estiver percebendo as flechas no ar. O pessoal da sala percebe flechas no ar e Tom está vermelho. Portanto, Marcinha não emitiu um olhar 43 para Mário.

b) Se Anilton está de férias e o dia está ensolarado, ele irá a igreja. Ele irá para fazenda ou Goiânia. Não há igreja na fazenda. Há igreja em Goiânia. Anilton está de férias e foi para fazenda. Portanto, o dia não está ensolarado.

c) Se Sr. Machado mora em Coromandel, ele vive em Minas, Sr. Machado mora em Coromandel. Portanto, Sr. Machado vive em Minas.

d) Se professor Marcelo dá uma palestra, seus alunos comparecerão se o ingresso for barato e não estiver chovendo. . Se professor Marcelo dá uma palestra, o ingresso será barato. Portanto, se professor Marcelo dá uma palestra, seus alunos comparecerão ou estará chovendo.

e) Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.

f) Se Sandra ama Paris, então ela é feliz.
A partir deste fato, o que se pode concluir a respeito da afirmação a seguir.
Se Sandra não ama Paris ou é feliz, então ela ama Paris ou é feliz.

g) Se Agostinho ama Marciana, então podemos concluir que:

se Marciana é bonita, inteligente e sensível,
então Agostinho é feliz.

A partir do conjunto de argumentos acima, podemos concluir que:
Agostinho não ama Marciana, ou
Marciana não é bonita, não é inteligente e nem é sensível, ou
Agostinho é feliz.

h) Se Agnaldo é otimista, então Sílvio é pessimista. Se Sílvio é otimista então Wilson é otimista. Portanto, se Agnaldo é otimista ou Wilson é pessimista, então Sílvio é pessimista.

i) Se Bethânia está bonita, então Marcelo estará tranqüilo se o Ricardão estiver longe. Bethânia não está estudando ou Marcelo está tranqüilo.
Portanto,
se Marcelo está intranqüilo, então temos que:

Bethânia não está estudando,
e
Bethânia não está bonita ou o Ricardão está perto.

j) Se a linda de Araguari me beija, fico louco! A linda de Araguari não me beijou. Portanto, não fiquei louco.

k) Se a linda de Patrocínio me beija, fico louco! Não fiquei louco. Portanto, a linda de Patrocínio não me beijou.

l) Se Lenin é comunista, ele é ateu. Lenin é ateu, portanto ele é comunista.

m) Se houver economia de energia e investimentos em hidrelétricas, não haverá apagão. Não houve economia de energia. Logo, se houver apagão significa que não haverá investimentos em hidrelétricas.

n) Se Fernandinho (aquele das Alagoas) ganhar as eleições, a corrupção aumentará se a impunidade permanecer alta. Se Fernandinho ganhar as eleições, a impunidade permanecerá alta. Portanto, se Fernandinho ganhar as eleições, a corrupção aumentará.

o) Se os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, os gastos da prefeitura aumentarão ou crescerá o desemprego. Se os gastos da prefeitura não aumentarem, os impostos municipais poderão ser reduzidos. Se os impostos municipais forem reduzidos e os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, não haverá desemprego. Portanto, os gastos da prefeitura não aumentarão.

p) Se Rita está bonita, então Etiene está feliz e se Etiene está feliz, Stephane está preocupado. Portanto, se Stephane está preocupado, então Rita está bonita e não é verdade que se Etiene está preocupado, então Roxane está feliz.

q) Denise ama Victor ou Hugo. Se Denise ama Victor, então ela também ama Hugo. Conclui-se que Denise necessariamente ama Victor.

6) Demonstre, utilizando indução, que toda fórmula da Lógica Proposicional possui uma forma clausal associada.

7) Demonstre o teorema da correção na resolução.

8) Seja H uma fórmula. Responda, justificando, se as afirmações a seguir são verdadeiras. Utilize os teoremas da completude e da correção.

a) Se todo tableau associado a $\neg$H possui ramo aberto, então H não é tautologia.
b) Se não existe tableau associado a $\neg$H com ramo fechado, então H não é tautologia.
c) Se existe tableau associado a $\neg$H com todos os ramos abertos, então H não é tautologia.
d) Se existe tableau associado a $\neg$H com ramo fechado, então H é tautologia.
e) Se existe tableau associado a $\neg$H com todos os ramos fechados, então H é tautologia.
f) Se todo tableau associado a $\neg$H possui ramo fechado e aberto, então H é tautologia.
g) Se todo tableau associado a $\neg$H possui ramo aberto, então H não é contraditória.
h) Se não existe tableau associado a $\neg$H com ramo fechado, então H não é contraditória.
I) Se existe tableau associado a $\neg$H com todos os ramos abertos, então H não é contraditória.
j) Se existe tableau associado a $\neg$H com ramo fechado, então H é contraditória.
k) Se existe tableau associado a $\neg$H com todos os ramos fechados, então H é contraditória.
l) Se todo tableau associado a $\neg$H possui ramo fechado e aberto, então H é contraditória.
m) Se toda expansão por resolução associada a $\neg$Hc é aberta, então H não é tautologia.
n) Se não existe expansão por resolução associada a $\neg$Hc fechada, então H não é tautologia.
o) Se existe expansão por resolução associada a $\neg$Hc fechada, então H não é tautologia.
p) Se existe expansão por resolução associada a $\neg$Hc fechada, então H é tautologia.
q) Se existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então H é contraditória.
r) Se toda expansão por resolução associada a Hc é aberta, então H é tautologia.
s) Se não existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então H é contraditória.

## Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) Para demonstrar por exemplo que $\{R_1, R_2, R_5\} \Rightarrow R_3$, demonstre que o conseqüente de $R_3$ pode ser obtido a partir de seu antecedente utilizando apenas as regras $R_1$, $R_2$ e $R_3$. Transforme o antecedente $(A \rightarrow B)$ em $(\neg A \vee B)$.

4) Em cada item deste exercício as sentenças devem ser inicialmente representadas na Lógica Proposicional. Nesta representação, sentenças do tipo "se A então B", "B se A" são representadas por "A $\rightarrow$ B". Observe que em sentenças do tipo "se A, então B" a palavra "então" pode ser omitida tendo uma sentença da forma "Se há pouco sangue na

cena do crime, o matador é um profissional". Após a representação de cada conjunto de sentenças, obtém-se por exemplo um conjunto da forma $\beta=\{H, G, E\}$. Neste caso,

$\beta$ não é satisfatível $\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[H]=F ou I[G]=F ou I[E]=F $\Leftrightarrow \forall$ int. I, I[$H \wedge G \wedge E$]=F $\Leftrightarrow$
$\forall$ int. I, I[$\neg(H \wedge G \wedge E)$]=T $\Leftrightarrow \neg(H \wedge G \wedge E)$ é tautologia.

Portanto, em cada item se a negação da conjunção das afirmações for uma tautologia, o conjunto de afirmações não é satisfatível. Caso contrário ele é satisfatível. Para demonstrar se $\neg(H \wedge G \wedge E)$ é tautologia utilizando tableaux semânticos basta iniciar o tableau com a fórmula $(H \wedge G \wedge E)$. Para demonstrar se $\neg(H \wedge G \wedge E)$ é tautologia utilizando resolução deve-se iniciar a resolução com o conjunto $\{H, G, E\}$.

5) Em cada item deste exercício as sentenças devem ser inicialmente representadas na Lógica Proposicional. Veja as observações do exercício anterior. Em vários itens tem-se um conjunto de sentenças seguidas por uma conclusão, que geralmente ocorre após a palavra "portanto". A representação final nestes casos são sentenças do tipo $(H \wedge G \wedge E) \rightarrow A$. Utilizando tableau, a validade da fórmula é demonstrada iniciando o tableau com $\neg((H \wedge G \wedge E) \rightarrow A)$. No caso da resolução é necessário determinar a forma clausal de $\neg((H \wedge G \wedge E) \rightarrow A)$ que é equivalente a $(H \wedge G \wedge E \wedge \neg A)$. Observe que a última fórmula é transformada em uma fórmula clausal se H, G, E e $\neg A$ são transformadas em disjunções de literais.

6) Considere B[E] = $\exists$ fórmula Ec tal que Ec está na forma clausal e Ec equivale a E.

7) Suponha que existe uma prova de H por resolução. Logo, existe uma expansão por resolução fechada a partir de $\neg$Hc onde Hc é a forma clausal de H. Neste caso, como H equivale a Hc, então $\neg$H equivale a $\neg$Hc. Portanto, H é tautologia $\Leftrightarrow$ Hc é tautologia ou, equivalentemente, $\neg$H é contraditória $\Leftrightarrow \neg$Hc é contraditória. Deve-se demonstrar que se a expansão por resolução a partir de $\neg$Hc é fechada, então $\neg$Hc é contraditória, concluindo-se que $\neg$H é contraditória e H é tautologia. Considere então que a expansão por resolução a partir de $\neg$Hc é fechada. Suponha por absurdo que $\exists$ int. I tal que I[$\neg$Hc]=T. Como a regra da resolução mantém a validade, então o resultado de sua aplicação sobre $\neg$Hc também deve ser igual a T. Como a expansão é fechada, a última cláusula é vazia, que equivale a fórmula *false*. Portanto, se I[$\neg$Hc]=T, então I[*false*]=T, o que é um absurdo. Logo, não existe interpretação I tal que I[$\neg$Hc]=T, isto é $\forall$ int. I, I[$\neg$Hc]=F. Conclui-se que Hc é tautologia e portanto que H é tautologia.

Obs.: Uma demonstração mais rigorosa do teorema da correção deve usar indução finita.

8) a) Verdadeira pois a partir de um ramo aberto do tableau é possível determinar uma interpretação I tal que I[H]=F.
b) Verdadeira. Se não existe tableau associado a $\neg$H com ramo fechado, então todo tableau tem ramo aberto, logo, pelo item a), H não é tautologia.
c) Verdadeira. A justificativa é a mesma do item a).
d) Falsa. Se existe tableau associado a $\neg$H com ramo fechado, isto não significa que não haja ramo aberto. Caso haja ramo aberto, então H não é tautologia.
e) Verdadeira. Se existe tableau associado a $\neg$H com todos os ramos fechados, então tem-se uma prova de H utilizando tableau. Logo, pelo teorema da correção, H é tautologia.
f) Falsa. Como todo tableau associado a $\neg$H possui ramo aberto, então, conforme o item a), H não é tautologia.
g) Falsa. Se todo tableau associado a $\neg$H possui ramo aberto, então H não é tautologia. Mas isto não significa que H não é contraditória.

h) Falsa. Se não existe tableau associado a ¬H com ramo fechado, então todos os ramos de todos os tableaux são abertos. Neste caso, sempre existe ramo aberto logo, H não é tautologia, podendo se satisfatível ou contraditória.

i) Verdadeira. Se existe tableau associado a ¬H com todos os ramos abertos, então a partir de ¬H, utilizando o método do tableau para prova, não se chega a nenhuma contradição (o ramo fechado é quem determina a contradição). Isto significa que ∀ int. I, I[¬H]=T não é uma afirmação contraditória. Portanto, ∀ int. I, I[¬H]=T, logo H é contraditória.

j) Falsa. Se existe tableau associado a ¬H com ramo fechado, pode ocorrer o caso em que todos os ramos são fechados. Neste caso, H é tautologia.

k) Falsa. Se existe tableau associado a ¬H com todos os ramos fechados, então, pela mesma justificativa do item e), H é tautologia.

l) Falsa. Se todo tableau associado a ¬H possui ramo fechado e aberto, então, devido à presença de ramo aberto, H não é tautologia, podendo ser factível ou contraditória.

m) Verdadeira. Se toda expansão por resolução associada a ¬Hc é aberta, significa que não existe expansão associada a ¬Hc fechada. Logo, não é possível obter uma contradição de I[¬Hc]=T sendo I[Hc]=F isto é, Hc e H não são tautologias.

n) Verdadeira. Se não existe expansão por resolução associada a ¬Hc fechada, significa que todas são abertas. Logo, pelo item m), H não é tautologia.

o) Falsa. Se existe expansão por resolução associada a ¬Hc fechada, então existe uma prova por resolução de H. Logo, pelo teorema da correção, H é tautologia.

p) Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a ¬Hc fechada, existe uma prova de H por resolução. Logo, H é tautologia.

q) Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então, conforme item p), ¬H é tautologia. Logo, H é contraditória.

r) Falsa. Se toda expansão por resolução associada a Hc é aberta, então ¬H não é tautologia. Isto não significa e que H seja tautologia.

s) Falsa. Se não existe expansão por resolução associada a Hc fechada, então todas são abertas. Logo, pelo item r), ¬H não é tautologia. Isto não significa que H seja contraditória.