# Lista 9

**Definição (fecho de uma fórmula).** Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados e $\{x_1, ..., x_n\}$ o conjunto das variáveis livres em H.

- o fecho universal de H, indicado por $(\forall^*)H$, é dado pela fórmula $(\forall x_1)$ ... $(\forall x_n)H$
- o fecho existencial de H, indicado por $(\exists^*)H$, é dado pela fórmula $(\exists x_1)$ ... $(\exists x_n)H$

**Exemplo (fecho de uma fórmula).** A fórmula $E_1$, do exemplo anterior, é o fecho universal da fórmula E. Por outro lado, o fecho existencial de E é dado pela fórmula

$$E_2 = (\exists w)(\exists z)(\exists z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$$

A fórmula $E_2$ é obtida a partir da fórmula E, adicionando os quantificadores existenciais nas variáveis livres.

Dada uma fórmula fechada H, como H não possui variáveis livres, então o seu fecho universal, ou existencial, é igual a H. Isto é, se H é uma fórmula fechada, então $(\forall^*)H = (\exists^*)H = H$.

## Exercícios

1) Responda, justificando sua resposta, as seguintes questões:
   a) Todo termo é uma fórmula?
   b) Todo literal é uma expressão?
   c) Toda expressão é um literal?
2) Seja E a fórmula a seguir:
   $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$
   a) Determine todas as subfórmulas de E.
   b) Determine todas as subexpressões de E.
3) Reescreva os parênteses das fórmulas a seguir.
   a) $(\forall x)p(x) \vee \neg(\forall x)q(x) \rightarrow r(y)$
   b) $(\exists z)p(z) \leftrightarrow \neg q(y)$
   c) $(\exists x)(\forall x)\neg p(x)$

4) Elimine o máximo de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a fórmula original.
   a) $((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$
   b) $((((\forall x)p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow ((\forall z)q(z)))$
   c) $(((\exists y)((\forall z)p(z)) \wedge (r(z)) \vee ((\forall x)q(x)))$
5) Demonstre o princípio da indução na Lógica de Predicados.
6) Seja H uma fórmula e G uma subfórmula de H
   a) Em que condições se tem comp [G] < comp [H]
   b) Demonstre, utilizando o princípio da indução finita, que comp [G] ≤ comp [H].
7) Seja E uma fórmula e x uma variável. Responda justificando sua resposta.
   a) É possível haver ocorrências de x em E livres e ligadas?
   b) É possível a variável x ser livre e ligada em E ao mesmo tempo?
8) Dê exemplo de uma expressão H na qual uma variável x ocorre livre e ligada.
9) Responda:
   a) Existe fórmula ou expressão sem símbolo livre?
   b) Quais são os símbolos livres de uma fórmula fechada?
   c) Toda variável é símbolo livre?
10) Determine o fecho universal e existencial das fórmulas a seguir:
   a) $F_1 = p\ (x, y)$
   b) $F_2 = (\exists\ x)p(x, y)$
   c) $F_3 = (\exists\ y)(\exists\ x)p(x, y)$
11) Dê exemplos:
   a) de uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais.
   b) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores.
   c) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.

## Sugestões e soluções de exercícios selecionados

1) a) Não.
   b) Sim.
   c) Não.
3) a) $((\forall x)p(x) \vee ((\neg(\forall x)q(x)) \rightarrow r(y)))$
4) a) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$
5) O princípio da indução na Lógica de Predicados é um princípio da indução no comprimento das fórmulas. Considere A(n) = a asserção B[E] é verdadeira para fórmulas tais que comp[E]=n. Demonstre que neste caso o princípio da indução na lógica é apenas um caso particular da segunda forma do princípio da indução. Demonstre que

$$[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)$$

implica

$$[\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}] \Rightarrow \forall\ \text{form. } E\ B[E].$$

A demonstração desta implicação equivale à demonstração de

$$\{[[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)] \wedge [\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}]\} \Rightarrow \forall\ \text{fórmula } E\ B[E]$$

Para demonstrar a implicação anterior, suponha inicialmente as afirmações

$$[[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}] \Rightarrow \forall\ n\ A(n)\ ] \text{ e}$$
$$[\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}]$$

e demonstre que $\forall$ fórmula E B[E]. Como $\forall$ n A(n) equivale a $\forall$ fórmula E B[E], deve se demonstrar que

$$[\text{base-lógica-pred} \wedge \text{passo-lógica-pred}] \text{ implica}$$
$$[\text{base-forma2} \wedge \text{passo-forma2}]$$

6) Seja H uma fórmula e G uma subfórmula de H
   a) Quando $G \neq H$
   b) Considere o princípio da indução na Lógica de Predicados e B[E] = "se G é subfórmula de H, então comp [G] $\leq$ comp [F]".
7) a) Sim. Em uma mesma fórmula x pode ocorrer no escopo de um quantificador em x, na forma ligada e também fora do escopo de quantificadores, na forma livre. Observe que uma determinada ocorrência não pode ser ligada e livre ao mesmo tempo.
   b) Sim. Neste caso basta que haja duas ocorrências de x em E, uma ligada e a outra livre.
8) $(\exists x)p(x) \vee q(x)$.
9) a) Sim. H = *false*.
   b) Os símbolos de predicado e de funções.
   c) Não. As variáveis ligadas não são símbolos livres.
10) a) Fecho universal: $(\forall x)(\forall y)p\ (x, y)$. Fecho existencial: $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$
    b) Fecho universal: $(\forall y)(\exists x)p\ (x, y)$. Fecho existencial: $(\exists y)(\exists x)p(x, y)$
    c) Fecho universal e existencial: $(\exists\ y)(\exists\ x)p(x, y)$
11) a) $H = (\forall x)p(x)$.
    b) $H = p(a)$
    c) Qualquer fórmula fechada.