

Imagens digitais e matrizes¹

DIRCE UESU PESCO E HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

dirceuesu@gmail.com, hjbortol@vm.uff.br

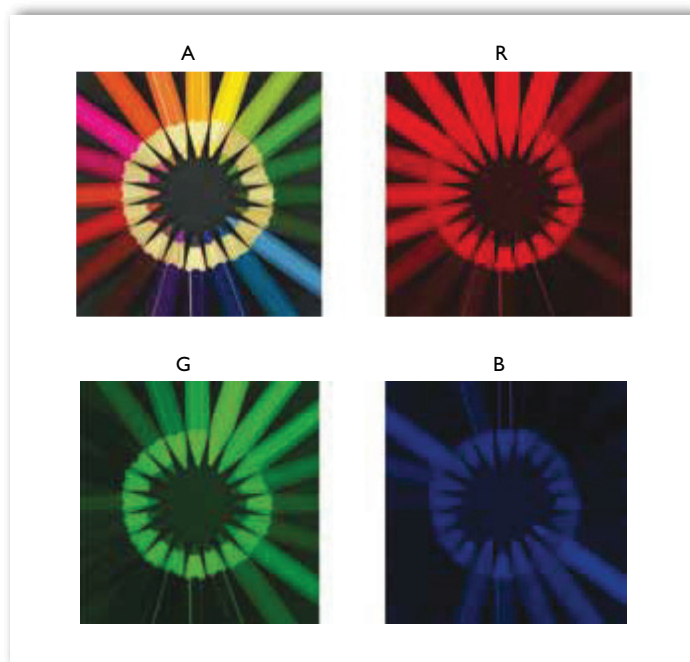
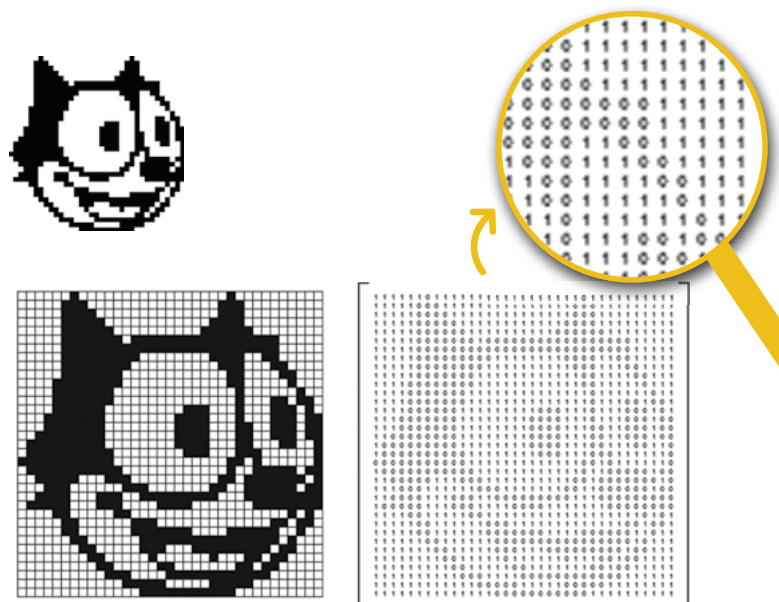
¹ Traduzido do original publicado em acesso livre em <http://blog.kleinproject.org> como uma Klein vignette. Tradução de Teresa Caissotti.

1. IMAGENS BINÁRIAS EM ESCALAS DE CINZENTO E DE CORES

As imagens que vê nas páginas da Internet ou as fotografias que tira com o telemóvel são exemplos de imagens digitais. É possível representar este tipo de imagens por matrizes. Por exemplo, a imagem do Gato Félix, pode ser representada por uma matriz 35×35 onde os elementos são os números 0 e 1. Estes números especificam a cor de cada píxel (píxel é o menor elemento gráfico de uma imagem matricial, o qual pode tomar apenas uma cor de cada vez): o número 0 indica cor preta e o número 1, cor branca. As imagens digitais que usam apenas duas cores são chamadas *imagens binárias* ou *imagens booleanas*.

As imagens em escalas de cinzento também podem ser representadas por matrizes. Cada elemento da matriz determina a intensidade do píxel correspondente. Por conveniência, a maioria dos ficheiros digitais usa números inteiros entre 0 (que indica a cor com menor intensidade, o preto) e 255 (que indica a cor com maior intensidade, o branco), o que dá um total de $256 = 2^8$ escalas diferentes de cinzento².

Imagens coloridas, podem ser representadas por três matrizes. Cada matriz especifica a quantidade de vermelho, verde e azul que compõe a imagem. Este sistema de cor é conhecido como **R**(ed) **G**(reen) **B**(lue)³. Os elementos destas matrizes são números inteiros entre 0 e 255, e determinam a intensidade do píxel com respeito à cor da matriz. Assim, no sistema RGB é possível representar $256^3 = 2^{24} = 16777216$ cores diferentes.



Aprenda nesta *Klein vignette* o que têm comum, além do nome, a estrela de cinema de animação dos anos 20 Gato Félix e o célebre matemático do século XX Felix Klein. Fique também a saber como transformar o retrato da Mona Lisa na sua versão em Lego.

² Este número de escalas de cinzento é suficiente para trabalhar, por exemplo, com imagens nas páginas da WEB. No entanto, existem certas aplicações específicas que necessitam de um maior número de escalas de cinzento de modo a poderem reproduzir imagens com maior detalhe e evitar erros de arredondamento em cálculos numéricos, como por exemplo é o caso de imagens médicas.

³ Existem muitos outros sistemas de cor que são usados conforme a aplicação: CMYK (para imprimir), Y'IQ (para as transmissões de TV analógica em NTSC, etc.)

2. PROCESSAMENTO DIGITAL DA IMAGEM E OPERAÇÕES COM MATRIZES

Uma vez que uma imagem digital pode ser representada por matrizes, podemos perguntar de que maneira as operações realizadas nas matrizes poderão afetar a imagem. Por exemplo, na figura 1, se considerarmos a imagem binária A representada pela matriz $A = (a_{i,j})$, então a imagem B correspondente à matriz transposta de A é $B = (b_{i,j}) = (a_{j,i}) = A^T$. A imagem H , por sua vez, corresponde à matriz $(a_{j,35-i+1})$. Tente descobrir a relação matricial entre a imagem A e as outras imagens!

Outro exemplo (figura 2): se determinarmos a média aritmética das matrizes componentes R , G e B de uma imagem a cores de A , obteremos uma versão da imagem em escalas de cinzento (os valores não inteiros são arredondados para o inteiro mais próximo).

Mais um exemplo: usando a multiplicação por um escalar e a soma de matrizes, é possível criar uma imagem com efeitos de transição. Este tipo de imagens é geralmente usado nas apresentações em PowerPoint. Mais precisamente, considerando duas imagens em escalas de cinzento com o mesmo tamanho, representadas por duas matrizes A e Z . Para cada escalar (número real) t no intervalo $[0, 1]$ definimos a seguinte matriz

$$M(t) = (1 - t)A + tZ \quad (1)$$

Repare-se que $M(0) = A$ e $M(1) = Z$ e, para cada t entre 0 e 1, os elementos da matriz $M(t)$ estão entre os elementos das matrizes A e Z . Portanto, quando t varia de 0 a 1, a matriz $M(t)$ varia de A a Z . No caso de imagens coloridas, a transformação apresentada em (1) deve ser aplicada às matrizes R , G , B que compõem cada imagem (ver figura 3).

A multiplicação de matrizes tem também aplicação no processamento de imagens digitais. Apesar de o próximo exemplo ser mais elaborado (utiliza conhecimentos de Álgebra Linear estudados no ensino superior), acreditamos, que mesmo assim será do interesse do leitor, já que esta aplicação deriva da habilidade de decompor a matriz como um produto de matrizes com uma estrutura especial. Os detalhes omitidos poderão ser encontrados nas referências [Lay, 2011] e [Poole, 2005]. Consideremos uma decomposição em valores singulares (DVS), que consiste em escrever a matriz $A_{m \times n}$ como produto de três matrizes

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} S_{m \times n} V_{n \times n}^T$$

onde U e V são ortogonais (isto é, $U^T U$ e $V^T V$ são as matrizes

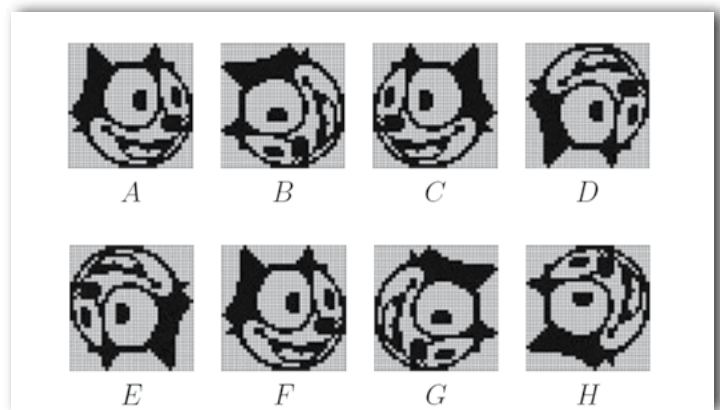


Figura 1

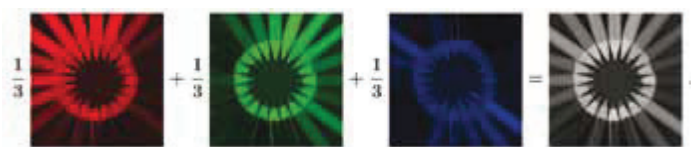


Figura 2



Figura 3

identidade de dimensão $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente) e S é uma matriz cujos elementos $s_{i,j}$ são iguais a zero para $i \neq j$ e $s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \dots \geq s_{k,k} \geq 0$, com $k = \min\{m, n\}$. Segue-se um exemplo de uma decomposição DVS

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = USV^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T$$

Mostra-se que qualquer matriz admite uma composição DVS [Lay, 2011] e [Poole, 2005]. Além disso, existem algoritmos que nos permitem calcular essa decomposição utilizando meios computacionais. A chave do nosso exemplo é observar que se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ são as colunas da matriz U e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ as colunas da matriz V , então

$$A = USV^T = s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{k,k}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T$$

Qual a utilidade desta fórmula no processamento digital de imagens? Suponhamos que A é uma imagem em escalas de cinzento de tamanho 1000×1000 transmitida a partir de um satélite para um laboratório na Terra. Em princípio o satélite terá de enviar 1 milhão de números (um por cada píxel). Apenas os primeiros elementos $s_{i,j}$ da matriz S da decomposição DVS de A são significativos (os outros são “desprezáveis”), é então suficiente que o satélite envie, por exemplo, apenas as 20 primeiras colunas de U e V , e os 20 primeiros números $s_{i,j}$ (num total de apenas $20 \cdot 1000 + 20 \cdot 1000 + 20$

= 40020 números que têm de ser enviados). Depois de receber estes dados no laboratório da Terra, é calculada a matriz $s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{20,20}\mathbf{u}_{20}\mathbf{v}_{20}^T$ o que nos dá aproximadamente a imagem original.

Vejamos um exemplo: a fotografia, na figura 4A em baixo, do matemático Christian Felix Klein (1849-1925) tem $720 \times 524 = 377289$ píxels.

Para a decomposição DVS da correspondente matriz desta imagem, podemos calcular as matrizes

$$s_{1,1}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_{2,2}\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + \dots + s_{r,r}\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^T$$

para $r = 1, 5, 10, 20$. Estas matrizes geram aproximadamente a imagem original, ilustrada na figura 4B em baixo.

A imagem original corresponde ao caso $r = 524$. Impressionante!

3. OUTRAS APLICAÇÕES

O processamento digital de imagens tem variadíssimas aplicações, como, por exemplo, na deteção remota de imagens, na transmissão de dados, em medicina, em robótica, na visão computacional, na indústria cinematográfica, etc. Em particular na deteção remota, as imagens adquiridas pelos satélites são úteis para monitorizar recursos naturais, para fins cartográficos e de análise do crescimento urbano, e em muitas outras aplicações ambientais. Na transmissão de imagens, temos comunicações por via fax, redes, Internet e circuito fechado de TV para segurança. Em aplicações médicas, temos processamento de imagem de raios-X, as imagens de projeção da tomografia axial, radiologia, ressonância magnética nuclear (RMN) e ultrassom de digitalização.

Certos métodos de aquisição e transmissão podem gerar algum “ruído” na imagem. O filtro de mediana é uma técnica de processamento da imagem usado para remover ou para

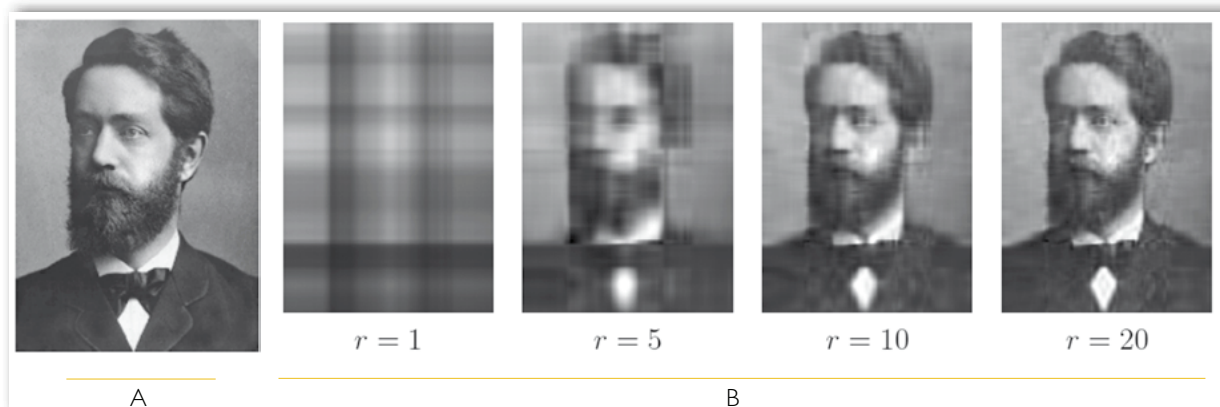


Figura 4

reduzir os seus efeitos: para cada elemento da matriz que representa a imagem, observamos os seus elementos vizinhos e, em seguida, colocamo-los numa lista ordenada. O filtro de mediana (figura 5) consiste em escolher o elemento central desta lista e substituir o elemento em causa por este.

Existem muitas outras técnicas de processamento de imagem com objetivos diferentes. A figura 6 ilustra exemplos de ajuste de contraste, detecção da borda e limiar.

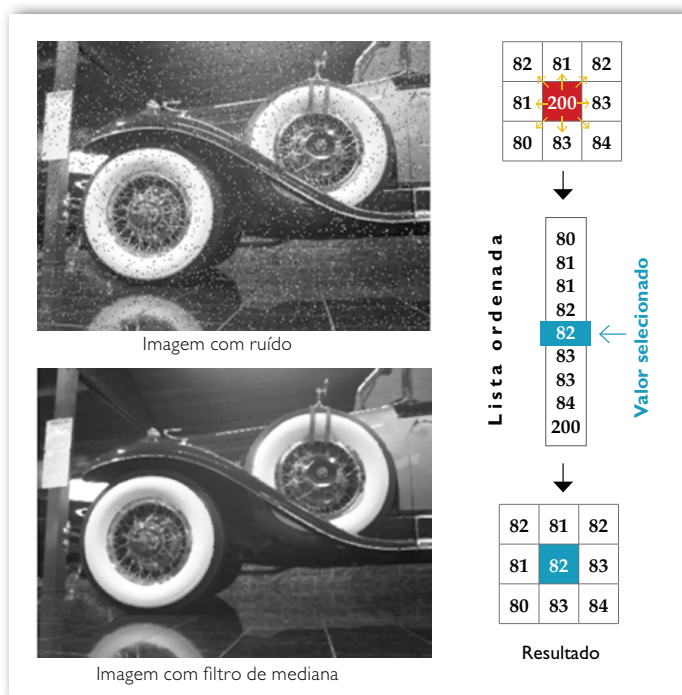


Figura 5

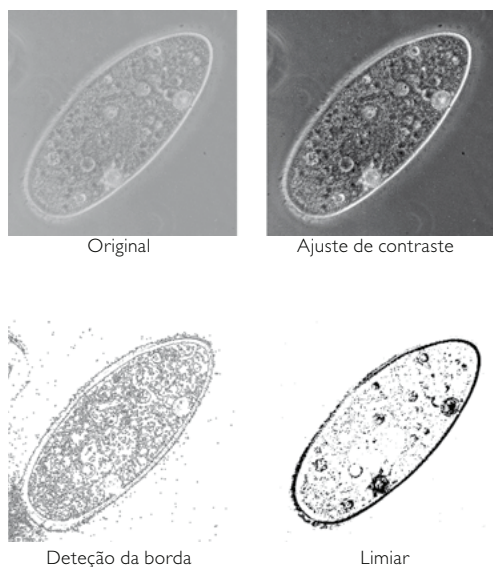


Figura 6

4. COMENTÁRIO FINAL

O objetivo deste texto é o de apresentar uma aplicação pouco conhecida de matrizes para professores e alunos do ensino secundário: o processamento de imagens digitais. É importante notar que as ferramentas matemáticas relacionadas com este tema vão muito para além das matrizes. O assunto é vasto, rico e moderno. Infelizmente, o limite de poucas páginas recomendadas para este artigo não nos permite dar mais detalhes. Como ponto de partida para o leitor motivado saber mais, recomendamos os livros [Gonzalez e Woods, 2007] e [Gomes e Velho, 2008].

5. REFERÊNCIAS

No site <http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-enhtml>, existe uma série de aplicações interativas que permitem explorar as relações entre matrizes e imagens digitais apresentadas neste texto. Encontra-se também um arquivo DOC com sugestões de exercícios a serem trabalhados em sala de aula.

Estas são as referências citadas no texto:

Gomes, J.; Velho, L. *Image Processing for Computer Graphics and Vision*. Springer-Verlag, 2008.

Gonzalez, R. C.; Woods, R. E. *Digital Image Processing*. Third Edition. Prentice Hall, 2007.

Lay, D. *Linear Algebra and Its Applications*. Forth Edition. Addison Wesley, 2011.

Poole, D. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. Second Edition. Brooks Cole, 2005.

A fotografia da Mona Liza em LEGO é propriedade de Marco Pece Udronotto, que gentilmente concedeu a permissão para ser usada neste trabalho.

SOBRE OS AUTORES

Dirce Uesu Pesco, doutorada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2000), é investigadora em Computação Gráfica Aplicada, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, em Niterói, Brasil.

Humberto José Bortolossi é doutorado em Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1999). Desenvolve investigação em Otimização e Informática no Ensino da Matemática Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense.