

Universidade Federal Fluminense - GAN
Lista 7 de Álgebra II - GAN00166

Jones Colombo

15 de junho de 2015

1. Calcule os polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{Z}_2[x]$ de grau 2 até 4.
2. Se p é um número primo, mostre que, em $\mathbb{Z}_p[x]$,

$$x^p - x = \prod_{i=0}^{p-1} (x - i).$$

3. Se $z = 2 + 4i$ e $w = -9 + 17i \in \mathbb{Z}[i]$. Calcule o MDC $\{z, w\}$.
4. Se $z = c + d\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$, onde ω é a 3-ésima raiz primitiva da unidade. Mostre que $N(z) = c^2 - cd + d^2$.
5. Encontre as unidades em $\mathbb{Z}[\omega]$.
6. Se $z = 91 + 84\omega$ e $z' = 34 + 53\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$. Calcule o MDC $\{z, z'\}$, expresse-o em termos de z e z' .
7. fatore em primos em $\mathbb{Z}[\omega]$ os seguintes elementos: (i) $5 + \omega$, (ii) $5 + 8\omega$.
8. Em $\mathbb{Z}[\omega]$: (a) quais são todos os associados ao primo $1 - \omega$; (b) Mostre que $1 - \omega$ e $1 - \omega^2$ são associados; (c) escreva $(1 - \omega)(1 - \omega^2)$ como $a + b\omega$.
9. Seja $\alpha = \sqrt{-5}$ e considere o anel $\mathbb{Z}[\alpha]$. Mostre que se $z = a + b\alpha$, então $N(z) = a^2 + 5b^2$.
10. Mostre que 2, 3, $1 + \alpha$ e $1 - \alpha$ são primos em $\mathbb{Z}[\alpha]$. E que não são associados.
11. Prove a identidade $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$.
12. Prove que cada tripla pitagórica é semelhante a uma tripla proveniente do método babilônico.