Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
2^a *Prova de Álgebra Linear II*

Nome(a):____

30/06/2015

1. $[3,0pts]$ Seja $W \subset \mathbb{R}^4$ um subespaço vetorial gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,1,1)$ e $v_2 = (-1,0,1,4)$. Qual é a projeção ortogonal de $v = (2,0,4,6)$ sobre W.

2. $[2,5pts]$ Encontre a adjunta do operador $H = \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por $H(x,y,z) = (2x + (1-i)y, (3+2i)x - 4iz, 2ix + (4-3i)y - 3z)$, onde o produto interno em $\mathbb{C}^3$ é o usual.

3. $[2,0pts]$ Fixe a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Considere V o espaço das matrizes Reais 2×2. Considere a aplicação $f(X,Y) = \mathrm{tr}(X^t A Y)$, com $X, Y \in V$. a) Mostre que f é bilinear. b) Encontre a matriz de f com respeito a base
$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. $[2,5pts]$ Considere $\mathbb{R}[x]$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes Reais. Considere neste espaço vetorial o produto interno definido por $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ e, a base $X = \{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ de $\mathbb{R}[x]$. Encontre os 4 primeiros termos da base $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ obtida por aplicar o processo de Gram-Schmidt em X.

Boa Prova!

Desafio: Mostre que todo operador ortogonal, diferente da identidade, do $\mathbb{R}^3$ tem com respeito a uma base ortogonal uma das seguintes formas:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$