Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
VS de Álgebra Linear II

Nome(a):____

9/7/2015

1. $[2,0pts]$ Em cada item determine se a proposição é verdadeira ou falsa e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   a) Se $A_{n\times n}$ é uma matriz quadrada, então $A = [I]^{\alpha}_{\beta}$ para algum par de bases α e β de $\mathbb{R}^n$. b) Se duas matrizes têm o mesmo determinante, então elas são semelhantes. c) Se v_1 e v_2 são autovetores L.I. da matriz simétrica A, então v_1 e v_2 são ortogonais. d) Se A e B são matrizes simétricas, então AB é simétrica.

2. $[2,5pts]$ Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

3. $[2,5pts]$ Considere o espaço V gerado pelas funções $1, e^x, e^{-x}$ e a função $T : V \to V$ definida por

$$T(f(x)) = f(-x)$$

   a) Verifique que T é um operador linear;

   b) Determine a matriz de T com respeito à base $\alpha = \{1, e^x, e^{-x}\}$;

   c) Este operador é diagonalizável? Se o for encontre uma base de autovetores.

4. $[1,5pts]$ Defina $\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$, para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Verifique que esse é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

5. $[1,5pts]$ Ache $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma a minimizar o valor da integral

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 \, dx.$$

Boa Prova!