Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da VS de Álgebra Linear II
Aluno(a): Ptolomeu - Estudou com o Professor Raimundo

9/7/2015

1. $[2, 0pts]$ Em cada item determine se a proposição é verdadeira ou falsa e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   a) Se $A_{n\times n}$ é uma matriz quadrada, então $A = [I]^{\alpha}_{\beta}$ para algum par de bases α e β de $\mathbb{R}^n$. b) Se duas matrizes têm o mesmo determinante, então elas são semelhantes. c) Se v_1 e v_2 são autovetores L.I. da matriz simétrica A, então v_1 e v_2 são ortogonais. d) Se A e B são matrizes simétricas, então AB é simétrica.

   Solução: a) FALSA, pois A pode não ser invertível. A matriz de mudança de coordenadas é sempre invertível, pois leva base em base. Por outro lado, se $\det A \neq 0$, então tome $\alpha = \{$ vetores colunas da matriz A $\}$ e β a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

   b) FALSO, as matrizes $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ tem o mesmo determinante, mas tem autovalores distintos, então não são semelhantes.

   c) FALSO, tome $A = I$ que é simétrica, então quaisquer dois vetores LI são autovetores de A.

   d) FALSO, tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ que são simétricas, mas $AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

---

2. $[2, 5pts]$ Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

   Solução: No momento da prova diminui a exigência para apenas os caso n=2 e n=3. Para $n = 2$ temos

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)$$

No caso $n = 3$ temos

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3).
\end{aligned}$$

obtivemos a 1ª igualdade fazendo $\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1$ e $\ell_3 \to \ell_3 - \ell_1$; a 2ª igualdade fazendo a expansão de laplace na 1ª coluna; na 3ª igualdade colocamos em evidência $x_2 - x_1$ na linha 1 e $x_3 - x_1$ na linha 2; na 4ª igualdade fizemos $c_2 \to c_2 - x_1 c_1$; na 5ª igualdade usamos o caso $n = 2$.

---

3. $[2, 5pts]$ Considere o espaço V gerado pelas funções $1, e^x, e^{-x}$ e a função $T : V \to V$ definida por

$$T(f(x)) = f(-x)$$

a) Verifique que T é um operador linear;

b) Determine a matriz de T com respeito à base $\alpha = \{1, e^x, e^{-x}\}$;

c) Este operador é diagonalizável? Se o for encontre uma base de autovetores.

Solução: a) Sejam $f(x), g(x)$ duas funções e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$T((f + \alpha g)(x)) = (f + \alpha g)(-x) = f(-x) + \alpha g(-x) = T(f(x)) + \alpha T(g(x)).$$

b) Veja que

$$\begin{aligned}
T(1) = 1 \quad &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 0 \cdot e^{-x} \\
T(e^x) = e^{-x} \quad &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 1 \cdot e^{-x} \\
T(e^{-x}) = e^x \quad &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot e^x + 0 \cdot e^{-x}
\end{aligned}$$

Portanto, $A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Veja que

$$\Delta_A(x) = \det(xI - A) = \det \begin{bmatrix} x - 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).$$

Testando $m_A(x) = (x-1)(x+1)$ para ser o polinômio mínimo obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, A é diagonalizável e os autovalores são $1, -1$. Os autovetores associados ao autovalor 1 são $(1,0,0) \to f(x) = 1$ e $(0,1,1) \to e^x + e^{-1} = 2\cosh(x)$ e o autovetor associado a -1 é $(0,1,-1) \to 2\,\mathrm{senh}(x)$.

Observação - associado ao autovalor 1 temos o espaço das funções pares e associado aos autovalor -1 temos o espaço das funções ímpares. Isto varia de acordo com o espaço de funções V considerado.

---

4. $[1,5pts]$ Defina $\langle u,v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$, para $u = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2,y_2)$. Verifique que esse é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Considere $w = (x_3,y_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \langle u+\alpha w, v\rangle &= 2(x_1+\alpha x_3)x_2 - (x_1+\alpha x_3)y_2 - x_2(y_1+\alpha y_3) + 2(y_1+\alpha y_3)y_2 \\ &= 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2 + \alpha(2x_3x_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + 2y_3y_2) \\ &= \langle u,v\rangle + \alpha\,\langle w,v\rangle\,. \end{aligned}$$

A bilinearidade segue de:

$$\langle u,v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2 = 2x_2x_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2y_2y_1 = \langle v,u\rangle\,.$$

Para a positividade veja que:

$$\begin{aligned} \langle u,u\rangle &= 2(x_1^2 - x_1y_1) + 2y_1^2 \\ &= 2(x_1^2 - x_1y_1 + \tfrac{1}{4}y_1^2) - \tfrac{1}{2}y_1^2 + 2y_1^2 \\ &= 2(x_1 - \tfrac{1}{2}y_1)^2 + \tfrac{3}{4}y_1^2 > 0 \end{aligned}$$

Pois é a soma de dois números ao quadrado. No caso que $\langle u,u\rangle = 0$ temos que $x_1 = \frac{1}{2}y_1$ e $y_1 = 0$ e portanto $u = 0$. Se $u = 0$ é claro que $\langle u,u\rangle = 0$.

Isto prova que o regra é realmente um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

---

5. $[1,5pts]$ Ache $a,b,c \in \mathbb{R}$ de forma a minimizar o valor da integral

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2\,dx.$$

Solução: A observação crucial é que se $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, é um produto interno então a distância do vetor x^3 ao subespaço gerado por $x^2, x, 1$ será dado pela integral acima. Então, para minimizar esta distância precisamos projetar ortogonalmente o vetor $f(x) = x^3$ sobre o espaço gerado pelos vetores $1, x, x^2$. Recordando da questão 4 da P2, calculamos uma base ortonormal para o espaço gerado por $1, x, x^2$ e obtivemos $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$.

Basta fazermos a projeção ortonormal de $f(x) = x^3$ sobre o espaço F gerado por $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ que nos dá

$$\mathrm{proj}_F\,(f(x)) = \frac{\langle 1, x^3\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 + \frac{\langle x, x^3\rangle}{\langle x,x\rangle}x + \frac{\langle x^2 - 1/3, x^3\rangle}{\left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle}(x^2 - 1/3) = \frac{3}{5}x.$$

Então basta tomarmos $a = 0$, $b = \frac{3}{5}$ e $c = 0$. Para minimizar a integral acima.
