Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
*Gabarito da P1 de Álgebra Linear - GAN00140*

08/06/2016

---

1. [20*pts*] Considere os vetores $v_1 = (1, -5, -4, 2)$, $v_2 = (1, 1, -1, 5)$, $v_3 = (2, -4, -5, 7)$ e $v_4 = (1, -7, -5, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Verifique se o vetor $u \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ quando: (A) $u = (1, -3, -3, 3)$, (B) $u = (1, 4, -5, 1)$.

   (b) Considere a matriz $A$ onde as linhas são os vetores $v_1$, $v_2$, $v_3$ e $v_4$. Calcule $\det(A)$.

   **Solução:** a) e b) Vamos organizar para fazer a questão em apenas um escalonamento. Na letra a) precisamos verificar que dois vetores pertencem ou não ao $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Então vamos verificar qual as condições para um vetor genérico pertencer, digamos que $u = (a, b, c, d)$. Precisamos verificar sob quais condições existem $x, y, z$ e $t$ tais que: $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = u$. Extraindo a matriz ampliada do sistema ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ -5 & 1 & -4 & -7 & b \\ -4 & -1 & -5 & -5 & c \\ 2 & 5 & 7 & 1 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 6 & 6 & -2 & 5a+b \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 4a+c \\ 0 & 3 & 3 & -1 & d-2a \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 & -1 & d-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6a+c-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9a+b-2d \end{bmatrix}$$

   Para que este sistema tenha solução precisamos que $6a + c - d = 0$ e $9a + b - 2d = 0$. Veja que o vetor $(1, -3, -3, 3)$ e o vetor $(1, 4, -5, 1)$ não satisfaz a 2ª equação. portanto, o primeiro vetor pertence e o outro não.

   Na letra b) claramente o $\det A = 0$.

---

2. [20*pts*] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   [05] a) O conjunto $S$ dos vetores $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tais que $x + ky = 0$, com $k \neq 0$. Então $S$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   [05] b) Se $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = 2 + c \right\}$, então $V$ é um subespaço vetorial de $M_2$.

[05] c) Os polinômios $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x - 2$ e $p_3(x) = x(x-2)$ são vetores linearmente independente no espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2.

[05] d) Se $A$ é uma matriz $5 \times 7$ não identicamente nula, então o posto de $A$ é 2, 3, 4 ou 5.

**Solução:** a) Verdadeira, seja $k \neq 0$ fixo. Considere $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ então, vamos verificar que $(x_1, y_1) - \lambda(x_2, y_2) = (x_1 - \lambda x_2, y_1 - \lambda y_2) \in S$, para ver isto observe que

$$x_1 - \lambda x_2 + k\,(y_1 - \lambda y_2) = x_1 + ky_1 - \lambda x_2 + k\lambda y_2 = 0 + \lambda(x_2 + ky_2) = 0 + \lambda 0 = 0.$$

Portanto, $(x_1, y_1) - \lambda(x_2, y_2) \in S$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Falso, veja que a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin V$.

c) Verdadeiro, vamos verificar que $rp_1(x) + sp_2(x) + tp_3(x) = 0$ só tem a solução $r = s = 0 = t$. Desenvolvendo obtemos

$$rx + s(x-2) + t(x(x-2)) = tx^2 + (r + s - 2t)x - 2s = 0$$

Fazendo $x = 0 \Rightarrow -2s = 0 \Rightarrow s = 0$. Se fizer $x = 1 \Rightarrow r - t = 0 \Rightarrow r = t$ e quando $x = 2 \Rightarrow t = r = 0$.

d) Falso, considere $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

---

3. [20*pts*] a) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e suponha que $\det(A) = -7$. Calcule:

a) $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{bmatrix}$ b) $\det \begin{bmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{bmatrix}$

c) $\det((2A)^{-1})$ d) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

b) Encontre a área do triângulo de vértices $(3,3)$, $(4,0)$ e $(-2,-1)$.

**Solução:** a) Veja que

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{bmatrix}$$
$$= 2\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 2\times(-7) = -14.$$

b)

$$\det\begin{bmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{bmatrix} = -3\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{bmatrix}$$
$$= -3\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ gd & h & i \end{bmatrix} = (-3)\times(-7) = 28.$$

c)

$$\det((2A)^{-1}) = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{2^3\det A} = \frac{1}{8\times(-7)} = -\frac{1}{56}.$$

d)Observe que

$$\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{ permutando linha 2 com a 3 } \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

logo $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix} = -(-7) = 7.$

3b) Vamos colocar um dos vértices na origem. $(3,3)-(-2,-1)=(5,4)$ e $(4,0)-(-2,-1)=(6,1)$. Daí $\det\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 5-24=-19$. Portanto, a área do triângulo é $\frac{19}{2}$.

---

4. [16*pts*] Seja $\alpha=\{(2,3),(1,2)\}$ e $\beta=\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,2,0)\}$ e $[T]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ache $T$.

**Solução:** Digamos que $\alpha' \subset \mathbb{R}^{\not\vDash}$, e $\beta' \subset \mathbb{R}^3$ são as bases canônicas, respectivas. Queremos determinar $[T]^{\beta'}_{\alpha'}$. Sabemos que $[T]^{\beta'}_{\alpha'} = [I]^{\alpha'}_{\alpha}\,[T]^{\beta}_{\alpha}\,[I]^{\beta}_{\beta'}$. Portanto, basta obtermos $[I]^{\alpha'}_{\alpha}$ e $[I]^{\beta}_{\beta'}$. Resolvemos o problema.

Como $\alpha'$ é a base canônica $[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, já $[I]_{\beta'}^{\beta} = \left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

Calculando a inversa obtemos $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, daí,

$$[T]_{\alpha'}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 7 \\ 15 & -7 & 12 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $T(x, y, z) = (9x - 4y + 7z, 15x - 7y + 12z)$.

---

5. [24*pts*] Determine $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que é uma reflexão em torno da reta determinada por $v = (1, 2)$.

   **Solução:** Podemos usar um pouco de geometria para fazê-lo. Iniciemos observando que $T(1, 2) = (1, 2)$ e como $(2, -1)$ é perpendicular a direção do vetor $(1, 2)$ temos que $T(2, -1) = -(2, -1)$. Portanto, se elegermos a base $\alpha = (1, 2), (2, -1)$, temos que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se $\alpha' \subset \mathbb{R}^2$ é a base canônica queremos determinar $[T]_{\alpha'}^{\alpha'}$. Fazendo as contas obtemos

$$\begin{aligned} [T]_{\alpha'}^{\alpha'} &= [I]_{\alpha'}^{\alpha} \, [T]_{\alpha}^{\alpha} \, [I]_{\alpha}^{\alpha'} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}. \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Daí, $T(x, y) = (\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5})$.

---