Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
1^a *Prova de Álgebra Linear II*

Nome(a):____

09/05/2017

1. $[2,6pts]$ Escalonando a matriz de Vandermonte
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$
mostre que o seu determinante é $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

2. $[2,2pts]$ Seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que, para algum $v \in V$ tenhamos $T^k(v) = 0$, mas $T^{k-1}(v) \neq 0$. Prove que:

   a) O conjunto $S = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ é linearmente independente.

   b) O subespaço $W = \text{Span}\{S\}$ é T-invariante;

   c) Se $W = V$, então S é uma base de V, como fica a matriz de T com respeito a base $\alpha = \{T^{k-1}(v), \ldots, T^2(v), T(v), v\}$.

3. $[3,0pts]$ Seja $T : V \to V$ um operador linear definido pela matriz abaixo com respeito a base canônica $\mathcal{C}$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
Faça o seguinte:

   a) Calcule o polinômio característico e o mínimo;

   b) Encontre os autovalores;

   c) Decida se o operador é diagonalizável ou não (justifique);

   d) Se for diagonalizável obtenha a matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal. Caso não seja diagonalizável admita que conhece uma base na qual o operador seja escrito como blocos de Jordan. Como esta matriz ficaria?

4. $[2,2pts]$ Encontre todas as possíveis formas de Jordan da matriz cujo polinômio característico é $\Delta(x) = (x-3)^3(x+4)^2$.

Exercício extra: Mostre que, dados $n+1$ pares de números $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, onde $x_0 < x_1 \cdots < x_n$, existe um, e somente um, polinômio p de grau $\leq n$ tal que $p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$.

Boa Prova!