Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da P1 de Álgebra Linear II

09/05/2017

---

1. $[2,6pts]$ Escalonando a matriz de Vandermonte

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

mostre que o seu determinante é $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

Solução: Escalonando faça $C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1, \ldots, C_n \to C_n - C_1$ obtemos a matriz abaixo.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

Fazendo a expansão de Laplace na primeira linha e recorde o seguinte produto notável: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^3 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)p_{n-1}(a,b)$. Utilizando a notação temos

$$\det A = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) & \cdots & (x_n - x_1)(x_n + x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2 - x_1)p_{n-2}(x_2, x_1) & (x_3 - x_1)p_{n-2}(x_3, x_1) & \cdots & (x_n - x_1)p_{n-2}(x_n, x_1) \end{bmatrix}$$

Cada coluna esta multiplicada pelo fator $(x_i - x_1)$ então podemos colocar cada um deles em evidência e obter

$$\det A = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (x_2 + x_1) & (x_3 + x_1) & \cdots & (x_n + x_1) \\ (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) & (x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2) & \cdots & (x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-2}(x_2, x_1) & p_{n-2}(x_3, x_1) & \cdots & p_{n-2}(x_n, x_1) \end{bmatrix}$$

Faça as seguintes operações elementares: $\ell_n \to \ell_n - x_1\ell_{n-1}, \dots, \ell_3 \to \ell_3 - x_1\ell_2, \ell_2 \to \ell_2 - x_1\ell_1$. É importante que seja feito nesta ordem. Obtendo assim

$$\det A = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

Portanto, recaímos no caso inicial, e podemos aplicar indução e a prova esta concluída.

---

2. $[2, 2pts]$ Seja $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que, para algum $v \in V$ tenhamos $T^k(v) = 0$, mas $T^{k-1}(v) \neq 0$. Prove que:

a) O conjunto $S = \{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ é linearmente independente.

b) O subespaço $W = \text{Span}\,\{S\}$ é T-invariante;

c) Se $W = V$, então S é uma base de V, como fica a matriz de T com respeito a base $\alpha = \{T^{k-1}(v), \dots, T^2(v), T(v), v\}$.

Solução: a) vamos provar que o conjunto S é linearmente independente, para isso considere a equação

$$x_0 v + x_1 T(v) + x_2 T^2(v) + \cdots + x_{k-1} T^{k-1}(v) = 0,$$

agora se aplicarmos T nesta equação e usando a linearidade de T e o fato de $T^k(v) = 0$ obtemos

$$x_0 T(v) + x_1 T^2(v) + x_2 T^3(v) + \cdots + x_{k-2} T^{k-1}(v) = 0.$$

Desta forma podemos continuar aplicando T obtendo depois de aplicar $k-2$ a equação $x_0 T^{k-2}(v) + x_1 T^{k-1}(v) = 0$ e na próxima vez que aplicarmos T obtemos $x_0 T^{k-1} v = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ e voltando em cada uma das equações anteriores obtemos que $x_0 = 0 = x_1 = \cdots = x_{k-1}$. Portanto, o conjunto S é LI.

b) Seja $v \in \text{Span}\,\{S\}$, logo devem existir escalares $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ tais que

$$v = c_0 v + c_1 T(v) + c_2 T^2(v) + \cdots + c_{k-1} T^{k-1}(v)$$

Se aplicarmos T temos

$$T(v) = c_0 T(v) + c_1 T^2(v) + c_2 T^3(v) + \cdots + c_{k-2} T^{k-1}(v) \in \text{Span}\,\{S\}.$$

c) Vamos escrever T com respeito a base α para isso, devemos calcular

$$\begin{array}{lll} T(T^{k-1}(v)) & = 0 & = 0T^{k-1} + 0T^{k-2}(v) + \cdots + 0T(v) + 0v \\ T(T^{k-2}(v)) & = T^{k-1}(v) & = 1T^{k-1} + 0T^{k-2}(v) + \cdots + 0T(v) + 0v \\ T(T^{k-3}(v)) & = T^{k-2}(v) & = 0T^{k-1} + 1T^{k-2}(v) + \cdots + 0T(v) + 0v \\ & \vdots & \\ T(v) & = T(v) & = 0T^{k-1} + 0T^{k-2}(v) + \cdots + 1T(v) + 0v \end{array}$$

Portanto, a matriz fica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

3. $[3,0pts]$ Seja $T : V \to V$ um operador linear definido pela matriz abaixo com respeito a base canônica $\mathcal{C}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Faça o seguinte:

a) Calcule o polinômio característico e o mínimo;

b) Encontre os autovalores;

c) Decida se o operador é diagonalizável ou não (justifique);

d) Se for diagonalizável obtenha a matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal. Caso não seja diagonalizável admita que conhece uma base na qual o operador seja escrito como blocos de Jordan. Como esta matriz ficaria?

Solução: Para calcular o polinômio característico veja que $\operatorname{tr}(A) = 1$, $\det(A) = 0$ e os cofatores principais são $\Delta_{11} = 0 = \Delta_{22} = \Delta_{33}$. E portanto, $\Delta_A(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1) = (x-0)^2(x-1)$.

Calculando os autovalores associados ao autovalor 0 temos

$$\mathrm{N}(A - 0I) = \mathrm{N}(A) = \operatorname{Span}\{(1,-1,0),(2,0,1)\}$$

Isto quer dizer que existem dois autovalores associados ao autovalor 0. Portanto, T é diagonalizável e o polinômio mínimo deve ser $m_A(x) = x(x-1)$.

Veja ainda que o vetor $\operatorname{Span}\{(1,2,1)\} = \operatorname{IM}(T) = \mathrm{N}(A - I)$. Portanto, basta tomarmos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesta base T é representada por $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

---

4. $[2,2pts]$ Encontre todas as possíveis formas de Jordan da matriz cujo polinômio característico é $\Delta(x) = (x-3)^3(x+4)^2$.

Solução: Como um dos fatores irredutíveis do $\Delta(x)$ é de grau 3 e o outro de grau 2, segue que existem $3 \times 2 = 6$ possibilidades para o polinômio mínimo. Vamos denotá-los por $m_1(x), m_2(x)$, etc.

Se $m_1(x) = (x-3)(x+4)$ então a matriz é diagonalizável e sua forma de Jordan é $A = \text{diag}\{3,3,3,-4,-4\}$.

Se $m_2(x) = (x-3)(x+4)^2$ então a sua forma de Jordan é $A = \text{diag}\left\{3,3,3,\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}\right\}$.

Se $m_3(x) = (x-3)^2(x+4)$ então a sua forma de Jordan é $A = \text{diag}\left\{\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix},3,-4,-4\right\}$.

Se $m_4(x) = (x-3)^2(x+4)^2$ então a sua forma de Jordan é $A = \text{diag}\left\{\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix},3,\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}\right\}$.

Se $m_5(x) = (x-3)^3(x+4)$ então a sua forma de Jordan é $A = \text{diag}\left\{\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},4,-4\right\}$.

Se $m_6(x) = (x-3)^2(x+4)^2$ então a sua forma de Jordan é $A = \text{diag}\left\{\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}\right\}$.

Exercício extra: Mostre que, dados $n+1$ pares de números $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, onde $x_0 < x_1 \cdots < x_n$, existe um, e somente um, polinômio p de grau $\leq n$ tal que $p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$.

Solução: Já sabemos $\alpha = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base do conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinômios de grau menor ou igual a n. Queremos determinar se existe um polinômio $p(x)$ que satisfaçam as condições do exercícios, mas isto é equivalente a determinar a existência e unicidade de escalares $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tais que:

$$\begin{cases} p(x_0) &= c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \cdots + c_nx_0^n = y_0 \\ p(x_1) &= c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \cdots + c_nx_1^n = y_1 \\ p(x_2) &= c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_2^n = y_2 \\ &\vdots \\ p(x_0) &= c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \cdots + c_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Mas este sistema tem solução única, se e somente se,

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \neq 0$$

que é o determinante da transposta da matriz do exercício 1. Como $x_i > x_j$ se $i > j$, segue que $\prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$. O que garante que existe uma e somente uma solução ao sistema acima.

Uma visão mais geral do que esta acontecendo

Dado os pontos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, onde $x_0 < x_1 \cdots < x_n$. Podemos fazer a interpolação de Lagrange deles. Para isso considere

$$f_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}.$$

Então é claro que $f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$ e o grau de $f_i(x)$ é menor ou igual a n. Além disso, $\beta = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ também é uma base $\mathcal{P}_n$. De fato, vamos provar que estes polinômios são linearmente independentes, monte a equação em z_i

$$z_0 f_0(x) + z_1 f_1(x) + \cdots + z_n f_n(x) = 0.$$

Para ver que a única solução é $z_0 = 0 = z_1 = \cdots z_n$ basta avaliar a equação em x_i, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Como são n polinômios LI em um espaço de dimensão n temos que estes n vetores formam uma base. Além disso, as coordenadas do polinômio, $p(x)$ que procuramos acima, na base β, são exatamente $(y_0, y_1, \dots, y_n)$, uma vez que

$$p(x) = y_0 f_0(x) + y_1 f_1(x) + \cdots + y_n f_n(x).$$

satisfaz as condições procuradas. Como temos duas bases podemos ficar interessados na matriz de mudança de coordenadas da base α para a β. Mas isso é relativamente fácil, pois

$$x^j = x_0^j f_0(x) + x_1^j f_1(x) + \cdots + x_n^j f_n(x), \text{ com } j = 0, 1, \dots, n.$$

Portanto,

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}.$$
